

ベクトル解析

1 ベクトル vector

ベクトルの直交座標表示

ベクトル $\mathbf{A}$ の直交座標軸 x, y, z 方向のそれぞれの成分を A_x, A_y, A_z とすると

$$\mathbf{A} = iA_x + jA_y + kA_z$$

のように記せる。

ただし i, j, k は x, y, z 各座標軸の基本ベクトルである。

このときベクトルの大きさ $|\mathbf{A}|$ は次式によって定義される。

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

基本ベクトル

基本ベクトル i, j, k は次のような演算規則に従う。

$$\text{基本ベクトルの大きさ } |i| = |j| = |k| = 1$$

内積

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \quad \text{ただし「} \cdot \text{」は内積の記号}$$

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$

$$j \cdot i = k \cdot j = i \cdot k = 0$$

外積

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0 \quad \text{ただし「} \times \text{」は外積の記号}$$

$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j$$

$$j \times i = -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j$$

ベクトルの和と差

二つのベクトルを $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ とするとき、それらベクトルの和と差は次式によって与えられる。

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = i(A_x + B_x) + j(A_y + B_y) + k(A_z + B_z)$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = i(A_x - B_x) + j(A_y - B_y) + k(A_z - B_z)$$

$$\text{ただし } \mathbf{A} = iA_x + jA_y + kA_z, \quad \mathbf{B} = iB_x + jB_y + kB_z$$

ベクトルの内積と外積

二つのベクトルを $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ とするとき、それらベクトルの内積と外積は次式によって与えられる。

内積

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (iA_x + jA_y + kA_z) \cdot (iB_x + jB_y + kB_z)$$

$$= i \cdot iA_xB_x + i \cdot jA_xB_y + i \cdot kA_xB_z + j \cdot iA_yB_x + j \cdot jA_yB_y + j \cdot kA_yB_z + k \cdot iA_zB_x + k \cdot jA_zB_y + k \cdot kA_zB_z$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\text{すなわち } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

(ベクトルの内積は交換則が成り立つ。)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (\text{ベクトルの大きさ } |\mathbf{A}| \text{ の二乗を与える。})$$

外積

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z) \times (\mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z) \\ &= \mathbf{i} \times \mathbf{i}A_xB_x + \mathbf{i} \times \mathbf{j}A_xB_y + \mathbf{i} \times \mathbf{k}A_xB_z + \mathbf{j} \times \mathbf{i}A_yB_x + \mathbf{j} \times \mathbf{j}A_yB_y + \mathbf{j} \times \mathbf{k}A_yB_z + \mathbf{k} \times \mathbf{i}A_zB_x \\ &\quad + \mathbf{k} \times \mathbf{j}A_zB_y + \mathbf{k} \times \mathbf{k}A_zB_z \\ &= \mathbf{i} \times \mathbf{j}A_xB_y + \mathbf{i} \times \mathbf{k}A_xB_z + \mathbf{j} \times \mathbf{i}A_yB_x + \mathbf{j} \times \mathbf{k}A_yB_z + \mathbf{k} \times \mathbf{i}A_zB_x + \mathbf{k} \times \mathbf{j}A_zB_y \\ &= \mathbf{k}A_xB_y - \mathbf{j}A_xB_z - \mathbf{k}A_yB_x + \mathbf{i}A_yB_z + \mathbf{j}A_zB_x - \mathbf{i}A_zB_y \\ &= \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \mathbf{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x) \end{aligned}$$

$$\text{すなわち } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \mathbf{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (\text{ベクトルの外積は交換則が成り立たない。})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{同一のベクトルの外積は零となる。})$$

ベクトルの幾何学的表示

ベクトル $\mathbf{A}$ は有向線分（矢印）で表示することも出来る。

このときベクトル $\mathbf{A}$ の大きさ $|\mathbf{A}|$ は、有向線分の長さ（矢印の長さ）となる。

負のベクトル $-\mathbf{A}$ については、逆向き有向線分（逆向きの矢印）で表される。

ベクトルの和 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ は、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を二辺とする平行四辺形の対角線を長さとする有向線分となる。

ベクトルの内積は、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$ で与えられる。ただし θ は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角である。

ベクトルの外積は、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を二辺とする平行四辺形の面積 $AB \sin \theta$ を長さとするベクトルであって、方向はその面に垂直で右ねじの進む向きで定義される。その外積の大きさは、 $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta$ である。

ベクトルの微分

ベクトル $\mathbf{A}$ や $\mathbf{B}$ がスカラーの変数 t の関数になっているとき、すなわち $\mathbf{A}(t)$ や $\mathbf{B}(t)$ のとき、次式のような微分演算が定義される。

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dA_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dA_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dA_z}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

ベクトルの積分

ベクトル $\mathbf{A}$ や $\mathbf{B}$ がスカラーの変数 t の関数になっているとき、すなわち $\mathbf{A}(t)$ や $\mathbf{B}(t)$ のとき、次式のような積分演算が定義される。

$$\int \mathbf{A} dt = \mathbf{i} \int A_x dt + \mathbf{j} \int A_y dt + \mathbf{k} \int A_z dt$$

$$\int (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) dt = \int \mathbf{A} dt \pm \int \mathbf{B} dt$$

ベクトルの応用例

ベクトルの応用例を次に記す。

$$\text{位置ベクトル } \mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$$

$$\text{変位ベクトル } d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$$

$$\text{速度 } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$= \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z = \mathbf{i}\frac{dx}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy}{dt} + \mathbf{k}\frac{dz}{dt} \quad (\text{ただし } t \text{ は時間})$$

$$\text{加速度 } \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

$$= \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z = \mathbf{i}\frac{dv_x}{dt} + \mathbf{j}\frac{dv_y}{dt} + \mathbf{k}\frac{dv_z}{dt} = \mathbf{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \mathbf{k}\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\text{運動量 } \mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

$$= \mathbf{i}p_x + \mathbf{j}p_y + \mathbf{k}p_z = \mathbf{i}mv_x + \mathbf{j}mv_y + \mathbf{k}mv_z \quad (\text{ただし } m \text{ は質量})$$

$$\text{力 } \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$= \mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z = \mathbf{i}ma_x + \mathbf{j}ma_y + \mathbf{k}ma_z$$

$$\text{仕事 } dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\text{運動エネルギー } K = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$$

$$= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

$$\text{力のモーメント } \mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$= \mathbf{i}(yF_z - zF_y) + \mathbf{j}(zF_x - xF_z) + \mathbf{k}(xF_y - yF_x) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\text{角運動量 } \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$= \mathbf{i}(yp_z - zp_y) + \mathbf{j}(zp_x - xp_z) + \mathbf{k}(xp_y - yp_x) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

2 ベクトル場 vector field

ベクトル場

ベクトル $\mathbf{A}$ が空間座標 (x, y, z) の関数になっているとき、すなわち $\mathbf{A}(x, y, z)$ のときベクトル場と呼ばれ、

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{i}A_x(x, y, z) + \mathbf{j}A_y(x, y, z) + \mathbf{k}A_z(x, y, z)$$

のように記せる。

ただし $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は x, y, z 各座標軸の基本ベクトルである。

[注] スカラー ϕ が空間座標 (x, y, z) の関数になっているとき、すなわち $\phi(x, y, z)$ のときはスカラー場と呼ばれる。

勾配

スカラー場 $\phi(x, y, z)$ とするとき、各点における勾配を表すベクトル $\text{grad } \phi$ が次式のように定義される。

$$\text{grad } \phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{grad の呼称 : グラジエント})$$

$$\text{ベクトル微分演算子 } \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{と} \quad \text{するとき}$$

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi \quad (\nabla \text{ の呼称 : ナブラ})$$

のように記せる。

発散

ベクトル場 $\mathbf{A}(x, y, z)$ とするとき、発散を表すスカラー $\text{div } \mathbf{A}$ が次式のように定義される。

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{div の呼称 : ダイバージェンス})$$

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{を用いると} \quad \text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

回転

ベクトル場 $\mathbf{A}(x, y, z)$ とするとき、回転を表すベクトル $\text{rot } \mathbf{A}$ が次式のように定義される。

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (\text{rot の呼称 : ローテーション})$$

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{を用いると} \quad \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

勾配の発散

スカラー場 $\phi(x, y, z)$ とするとき、各点における勾配の発散を表すスカラー $\text{div grad } \phi$ は次式のように記せる。

$$\text{div grad } \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{を用いると} \quad \text{div grad } \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$$

[注] ∇^2 を Δ で記すこともある。（呼称はラプラシアン）

回転の回転

ベクトル場 $\mathbf{A}(x, y, z)$ とするとき、回転の回転を表すベクトル $\text{rot rot } \mathbf{A}$ は次式のように記せる。

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\text{div grad } \mathbf{A} + \text{grad div } \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \text{grad div } \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A})$$

勾配の回転

スカラー場 $\phi(x, y, z)$ とするとき、勾配の回転を表すベクトル $\text{rot grad } \phi$ は常に零ベクトル $\mathbf{0}$ となる。

$$\text{rot grad } \phi = \nabla \times \nabla \phi = \mathbf{0} \quad (\text{ただし } \mathbf{0} = \mathbf{i}0 + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}0)$$

回転の発散

ベクトル場 $\mathbf{A}(x, y, z)$ とするとき、回転の発散を表すスカラー $\text{div rot } \mathbf{A}$ は常に零となる。

$$\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

公式

$$\text{div}(\phi \mathbf{A}) = (\text{grad } \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi (\text{div } \mathbf{A})$$

$$\text{rot}(\phi \mathbf{A}) = (\text{grad } \phi) \times \mathbf{A} + \phi (\text{rot } \mathbf{A})$$

スカラー場ならびにベクトル場の応用例

重力のポテンシャルエネルギー $U(x, y, z)$ とするとき、重力場 $\mathbf{F}(x, y, z)$ は次式によって与えられる。

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U$$

電荷密度 $\rho(x, y, z)$ とし、電流密度 $\mathbf{j}(x, y, z)$ とするとき、電荷の保存法則は次式のように記せる。

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{ただし } t \text{ は時間})$$

電場 $\mathbf{E}(x, y, z)$ とし、電荷密度 $\rho(x, y, z)$ とするとき、Gauss(ガウス)の法則は次式のように記せる。

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

電場 $\mathbf{E}(x, y, z)$ とし、磁束密度 $\mathbf{B}(x, y, z)$ とするとき、Faraday(ファラデー)の法則は次式のように記せる。

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$