集合

1　集合と演算

集合 set
考える範囲内の対象で、個々のものの全体のことをいう。
ここで個々のものを要素 element または元という。
［例］
数の集まり，図形の集まり，関数の集まり　など。

集合の要素
x が集合 A の要素（元）であることを記号 $\in$ を用いて $x \in A$ または $\ni$ と記す。
$\in$ は「x は A に属する.」という一つの真なる命題 P とみなせる。

［注］ 集合においては、命題 P が偽になるときは考えない。

集合の表わし方
(1) 集合 A の要素を一つずつ並べて { } で囲む方法。

$$A = \{x, y, \cdots, z\}$$

(2) 集合 A の要素が満たす条件 $P(x)$ を用いる方法。

$$A = \{x : P(x)\}$$

［例］
A が 10 以下の正の偶数の集合であるとき、
(1)　$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
(2)　$A = \{x : (0 < x \leq 10) \wedge (x \text{ は偶数})\}$

包含関係
二つの集合 A と B において、A のすべての要素が B の要素となっているとき、
A は B の部分集合 (subset) であるといい、$A \subset B$ または $B \supset A$ で表わす。
$A \subset B$ を命題で表すと $(x \in A) \to (x \in B)$ が真のときに該当する。
すなわち　$A \subset B$ ：「A は B に含まれる.」

［注］ $(x \in A) \to (x \in B)$ において、各命題 $x \in A,\ x \in B$ をそれぞれ P, Q とすると、
$P \to Q$ のように簡潔に記せる。

［例］
数の集合を A, B とする。
$A = \{1, 2, 3\}$ ならびに $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ のとき、$A \subset B$ である。
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ならびに $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ のとき、$A \subset B$ である。

［注］ 集合それ自身も部分集合の一つに含める。

集合の相等
集合 A と集合 B の要素が全く一致するとき、$A = B$ と定める。
［例］
$A = \{2, 4, 6\}$ ならびに $B = \{2, 4, 6\}$ のとき、$A = B$ である。

包含関係についての法則

$A \subset A$ （反射法則）

$(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow A = B$ （反対称法則）

$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ （推移法則）

真部分集合

$A \subset B$ かつ $A \neq B$ のとき、A は B の真部分集合であるという。

［例］

$A = \{1, 2, 3\}$ ならびに $B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき、A は B の真部分集合である。

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ならびに $B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき、A は B の部分集合であるが、真部分集合ではない。

［注］ 真部分集合には、集合それ自身を含めない。

数の集合の記号

$\mathbf{N}$ ：自然数 natural number（正の整数）

$\mathbf{Z}$ ：整数 integer

$\mathbf{Q}$ ：有理数 rational number

$\mathbf{R}$ ：実数 real number

$\mathbf{C}$ ：複素数 complex number

数の種類

複素数

↓

虚数, 実数

↓

無理数, 有理数

↓

非整数, 整数

↓

自然数, 零, 負整数

数の種類と包含関係

虚数と実数は複素数に含まれる。すなわち (虚数) $\subset \mathbf{C}$ かつ $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$

無理数と有理数は実数に含まれる。すなわち (無理数) $\subset \mathbf{R}$ かつ $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$

非整数と整数は有理数に含まれる。すなわち (非整数) $\subset \mathbf{Q}$ かつ $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$

自然数, 零, 負整数は整数に含まれる。

［注］ 実数 R は、虚数を除くすべての種類の数を含んでいる。

全体集合

一つの集合 X を固定して、その部分集合 A, B, C などについて考えるとき、X を全体集合という。

［例］

自然数全体からなる集合 $\mathbf{N}$

整数全体からなる集合 $\mathbf{Z}$

実数全体からなる集合 $\mathbf{R}$

など。

集合の演算

(1) 和 sum（合併集合 union）

A または B の少なくとも一方に属する要素の全体を $A \cup B$ で表わし、これを A と B の和または合併集合という。

すなわち $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$

(2) 積 product（共通集合 intersection）

A および B のどちらにも属する要素の全体を $A \cap B$ で表わし、これを A と B の積または共通集合という。

すなわち　$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$

［例］

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ならびに $B = \{4, 5, 6, 7\}$ とするとき、

和　$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

積　$A \cap B = \{4, 5\}$

［例題 1］ 次のような二つの集合 A と B があるとき、これらの和と積をそれぞれ求めよ。

$$A = \{x : (-30 \leq x \leq 90) \wedge (x \in \mathbf{R})\}$$
$$B = \{x : (50 \leq x \leq 150) \wedge (x \in \mathbf{R})\}$$

（解）

和　$A \cup B = \{x : (-30 \leq x \leq 150) \wedge (x \in \mathbf{R})\}$

積　$A \cap B = \{x : (50 \leq x \leq 90) \wedge (x \in \mathbf{R})\}$

空集合 empty set

要素を一つも含まない集合のことで、記号 $\emptyset$ で表わす。

すなわち　$\emptyset = \{\ \ \}$

［注］ 二つの集合 A と B に共通要素がないとき、A と B は「交わらない」あるいは「互いに素である」(disjoint) という。

すなわち　$A \cap B = \emptyset$

［例］

$A = \{1, 2, 3\}$ ならびに $B = \{4, 5, 6, 7\}$ のとき、$A \cap B = \emptyset$ となり、A と B は互いに素である。

集合の演算法則

$A \cup B = B \cup A$	（交換法則）
$A \cap B = B \cap A$	（交換法則）
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	（結合法則）
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	（結合法則）
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	（分配法則）
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	（分配法則）

補集合

全体集合 X の要素で部分集合 A に属さないもの全体を A の補集合といい、A' で表わす。

すなわち　$A' = \{x : (x \in A)'\}$

［例］

全体集合 $X = \{x : x \in \mathbf{Z}\}$ とし、その部分集合を $A = \{x : (x \leq 100) \wedge (x \in \mathbf{Z})\}$ とするとき、

補集合 A' は $A' = \{x : (x > 100) \wedge (x \in \mathbf{Z})\}$ となる。

差集合

集合 A に属して集合 B に属さない要素の全体を、A から B を引いた差集合といい、$A - B$ で表わす。

すなわち　$A - B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)'\}$

［注］ $A - B = A \cap B'$

［注］ $X' = \emptyset$ ならびに $\emptyset' = X$

［例］

全体集合 $X = \{x : x \in \mathbf{Z}\}$ とし、その部分集合を

$A = \{x : (10 \leq x \leq 120) \wedge (x \in \mathbf{Z})\}$

$B = \{x : (70 \leq x \leq 180) \wedge (x \in \mathbf{Z})\}$

とするとき、差集合　$A - B = \{x : (10 \leq x < 70) \wedge (x \in \mathbf{Z})\}$　となる。

集合と論理の関係

集合の表わし方 $A=\{x:P(x)\}$ において、条件 $P(x)$ は、x に関する命題関数とみることができる。
一方 $A=\{x:P(x)\}$ を命題で表すと $x\in A$ であるから、$\{x:P(x)\}$ は命題関数 $P(x)$ を真とするような要素 x の全体の集合である。
このとき集合と論理の間に次の関係が成り立つ。
論理的演算における選言 ($\vee$), 連言 ($\wedge$), 否定 ($'$) などは、集合の演算においてはそれぞれ集合の和 ($\cup$), 共通部分 ($\cap$), 補集合 ($'$) などに該当する。

［例］

二つの命題関数 $P(x)$ と $Q(x)$ があるとき、それらを真とする集合 $A=\{x:P(x)\}$ と $B=\{x:Q(x)\}$ について、次の対応が成り立つ。

論理	集合
$(x\in A)\vee(x\in B)$	$A\cup B$
$(x\in A)\wedge(x\in B)$	$A\cap B$
$(x\in A)'$	A'

［注］ 命題 $(x\in A)$ や $(x\in B)$ をそれぞれ記号 P や Q で表すと簡略に記せる。

［例題 2］ 分配法則 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ を命題で表し、論理式に関する法則を用いて証明せよ。

（解）

集合の要素 x とおいて、上式の左辺を命題で表わすと
「x は集合 $A\cap(B\cup C)$ に属する.」　であるから　$x\in\big(A\cap(B\cup C)\big)$　と記せる。
同様に右辺についても命題で表すと　$\big((x\in A)\wedge(x\in B)\big)\vee\big((x\in A)\wedge(x\in C)\big)$　と記せる。
したがって　$x\in\big(A\cap(B\cup C)\big)=\big((x\in A)\wedge(x\in B)\big)\vee\big((x\in A)\wedge(x\in C)\big)$
を論理式の法則を用いて証明すればよい。
左辺
$=x\in\big(A\cap(B\cup C)\big)$
$=(x\in A)\wedge(x\in B\cup C)$ ：「x は A に属し、かつ　x は $B\cup C$ に属する.」
$=(x\in A)\wedge\big((x\in B)\vee(x\in C)\big)$ ：「x は B に属するか、または　x は C に属し、かつ　x は A に属する.」
ここで論理式に関する分配法則 $P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$ を用いると
$=\big((x\in A)\wedge(x\in B)\big)\vee\big((x\in A)\wedge(x\in C)\big)$
$=$ 右辺
よって　左辺 $=$ 右辺

［例題 3］ 三つの集合

$$A=\{x:(-20\le x\le 60)\wedge(x\in\mathbf{R})\}$$
$$B=\{x:(30\le x\le 80)\wedge(x\in\mathbf{R})\}$$
$$C=\{x:(50\le x\le 120)\wedge(x\in\mathbf{R})\}$$

があるとき、これらの和と積をそれぞれ求めよ。

（解）

和　$A\cup B\cup C=\{x:\big((-20\le x\le 120)\wedge(x\in\mathbf{R}\}$
積　$A\cap B\cap C=\{x:(50\le x\le 60)\wedge(x\in\mathbf{R})\}$

集合に関する de Morgan の法則

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$
$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$

［例題 4］ 集合に関する de Morgan の法則 $(A\cup B)'=A'\cap B'$ を命題で表し、論理式に関する法則を用いて証明せよ。

（解）

集合の要素 x とおいて左辺を命題で表わすと
$x\in(A\cup B)'$ ：「x は集合 $(A\cup B)$ の補集合に属する.」

右辺についても同様にして

$(x \in A)' \wedge (x \in B)'$ ：「x は集合 A の補集合に属し　かつ　x は集合 B の補集合に属する.」

したがって　$x \in (A \cup B)' = (x \in A)' \wedge (x \in B)'$　を論理式に関する法則を用いて証明すればよい。

左辺 $= x \in (A \cup B)'$

$= \big((x \in A) \vee (x \in B)\big)'$ ：「x は A に属するか　または　x は B に属する　ということはない.」

ここで論理式に関する de Morgan の法則　$(P \vee Q)' = P' \wedge Q'$　を用いて

$= (x \in A)' \wedge (x \in B)'$ ：「x は A に属するということはなく、かつ　x は B に属するということもない.」

$=$ 右辺

よって　左辺 $=$ 右辺

2　写像

写像 mapping

二つの集合 X と Y があるとき、X の各要素 x に Y の一つの要素 y が対応させられているとき、
この対応のことを集合 X から Y への写像といい、記号 f で表わす。
すなわち　$f : X \to Y$
このとき X の要素 x に対応する Y の要素のことを、写像 f による x の像 (image) といい、$f(x)$ で表わす。
また 集合 X を写像 f の定義域、Y を f の値域という。

[注] 一般に X および Y が実数や複素数のとき、写像 $f : X \to Y$ のことを関数 (function) という。
すなわち 写像は関数の概念の一般化とみなせる。

集合の像

集合 X から Y への写像 f があるとき、X の部分集合 A に対して、A に属する要素 x の写像 f による像 $f(x)$ のことを、
f による集合 A の像といい、$f(A)$ で表わす。
すなわち　$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$

逆像（原像）

集合 Y の部分集合 B に対して、$f(x) \in B$ となるような集合 X の要素 x を写像 f による集合 B の逆像 あるいは
原像 (inverse image) といい、$f^{-1}(B)$ で表わす。
すなわち　$f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$

［例］

二つの整数の集合を X, Y とする。
ここで 写像 $f : X \to Y$ において f による x の像を　$y = f(x) = x^2$　とする。
X の部分集合　$A = \{x : (1 \leq x \leq 9) \wedge (x \in \mathbf{Z})\}$　が与えられたとき、f による集合 A の像 $f(A)$ は

$f(A) = \{y : (y = x^2) \wedge (x \in A)\}$
$= \{y : (y = x^2) \wedge (1 \leq y \leq 9) \wedge (x \in \mathbf{Z})\}$
$= \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$　である。

また Y の部分集合　$B = \{y : (1 \leq y \leq 9) \wedge (y \in \mathbf{Z})\}$　が与えられたとき、f による集合 B の逆像 $f^{-1}(B)$ は

$f^{-1}(B) = \{x : (y = x^2) \wedge (y \in B)\}$
$= \{x : (y = x^2) \wedge (1 \leq y \leq 9) \wedge (y \in \mathbf{Z})\}$
$= \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$　である。

集合の像に関する公式

集合 X における二つの部分集合を A_1, A_2 とし、集合 Y における二つの部分集合を B_1, B_2 とする。
また X の要素を x、Y の要素を y とする。

(1)　$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$
(2)　$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
(3)　$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
(4)　$A \subset f^{-1}(f(A))$

(5) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$
(6) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
(7) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
(8) $B \subset f(X)$ のとき $B = f(f^{-1}(B))$

3 集合族

集合族 family of sets
集合を要素とするような集合のことをいう。
［例］
$\big\{\{1\},\ \{1,2,3\},\ \{1,2,3,4,5\}\big\}$

一般に有限個または無限個の集合からなる任意の集合族 $\mathbf{A}$ を
$$\mathbf{A} = \{A_\mu : \mu \in M\}$$
のように記す。
ここで μ を集合 $\mathbf{A}$ の指標といい、M は指標の集合である。
［例］
三個の異なる要素をギリシャ文字 α, β, γ とするとき、四個の集合
$A_1 = \{\alpha, \beta\}$
$A_2 = \{\beta, \gamma\}$
$A_3 = \{\alpha, \gamma\}$
$A_4 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
を要素とする集合 すなわち集合族 $\mathbf{A}$ は
$$\mathbf{A} = \big\{\{\alpha,\beta\},\ \{\beta,\gamma\},\ \{\alpha,\gamma\},\ \{\alpha,\beta,\gamma\}\big\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\} = \big\{A_\mu : \mu \in \{1,2,3,4\}\big\} = \{A_\mu : \mu \in M\}$$
のように記せる。
ここで指標の集合 $M = \{1,2,3,4\}$ である。

べき集合 power set
集合 X のすべての部分集合 A_μ の全体を X のべき集合といい、$P(X)$ または 2^X で表す。
すなわち
$$P(X) = 2^X = \{A_\mu : A_\mu \subset X\}$$
である。
［例］
集合 $X = \{1,2,3\}$ があるとき、X のすべての部分集合は
$\{\ \},\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{2,3\},\ \{3,1\},\ \{1,2\},\ \{1,2,3\}$
の 8 個である。
よって
$P(X) = \big\{\{\ \},\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{2,3\},\ \{3,1\},\ \{1,2\},\ \{1,2,3\}\big\}$
である。

一般に n 個の要素からなる集合 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ があるとき、
べき集合 $P(X)$ は 2^n 個の集合を要素とする集合となる。

［例題 5］ 集合 $X = \{0,1\}$ があるとき、べき集合 $P(X)$ を求めよ。
（解）
部分集合は $\{\ \},\ \{0\},\ \{1\},\ \{0,1\}$ であるから
よって　$P(X) = \big\{\{\ \},\ \{0\},\ \{1\},\ \{0,1\}\big\}$

［注］ べき集合 $P(X)$ は集合を要素とする集合なので、集合族の一例である。

集合族の演算

要素を x とする全体集合を X とし、その部分集合の一つの集合族 $\mathbf{A}$ を

$\mathbf{A} = \{A_\mu : \mu \in M\}$

とする。

集合族の和集合とは、部分集合 A_μ のどれかに含まれているような要素 x の全体からなる集合のことをいい、

$\bigcup \mathbf{A}$　または　$\bigcup\{A_\mu : \mu \in M\}$

のように記す。

すなわち　$\bigcup \mathbf{A} = \bigcup\{A_1, A_2, \cdots, A_m\} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$　を意味する。

［例］

全体集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とし、その部分集合の一つの集合族 $\mathbf{A}$ を

$\mathbf{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$

ただし

$A_1 = \{2\}$

$A_2 = \{2, 3\}$

$A_3 = \{2, 4\}$

とすると、

これら部分集合のどれかに含まれているような要素は $2, 3, 4$ である。

したがって 集合族 $\mathbf{A}$ の和集合 $\bigcup \mathbf{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{2, 3, 4\}$ となる。

集合族の積集合とは、部分集合 A_μ のすべてに共通な要素 x の全体からなる集合のことをいい、

$\bigcap \mathbf{A}$　または　$\bigcap\{A_\mu : \mu \in M\}$

のように記す。

すなわち　$\bigcap \mathbf{A} = \bigcap\{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_m\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_m$　を意味する。

［例］

全体集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とし、その部分集合の一つの集合族 $\mathbf{A}$ を

$\mathbf{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$

ただし

$A_1 = \{1, 2, 3\}$

$A_2 = \{2, 3, 4\}$

$A_3 = \{2, 3, 4, 5\}$

とすると、

これら部分集合のすべてに共通な要素の全体は $2, 3$ である。

したがって 集合族 $\mathbf{A}$ の共通部分 $\bigcap \mathbf{A} = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2, 3\}$ となる。

［例題 6］ 全体集合 $X = \{x : (x \leq 9) \wedge (x \in \mathbf{N})\}$ とし、その部分集合の一つの集合族を

$\mathbf{A} = \{A_\mu : \mu \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ とする。

ただし

$A_1 = \{1, 2, 3\}$

$A_2 = \{2, 3, 4\}$

$A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A_4 = \{2, 3, 5\}$

である。

このとき $\bigcup \mathbf{A}$ と $\bigcap \mathbf{A}$ をそれぞれ求めよ。

（解）

部分集合のどれかに含まれているような要素は $1, 2, 3, 4, 5, 6$ であるから

よって

$\bigcup \mathbf{A} = \bigcup\{A_1, A_2, A_3, A_4\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{x : (x \leq 6) \wedge (x \in \mathbf{N})\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

部分集合のすべてに共通な要素の全体は $2, 3$ であるから

よって

$\bigcap \mathbf{A} = \bigcap\{A_1, A_2, A_3, A_4\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \{x : (1 < x < 4) \wedge (x \in \mathbf{N})\} = \{2, 3\}$

集合族の演算公式

(1) 結合法則

$(\bigcup \mathbf{A}) \cup B = \bigcup \big\{(A_\mu \cup B) : \mu \in M\big\}$　すなわち　$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) \cup B = (A_1 \cup B) \cup (A_2 \cup B) \cup \cdots \cup (A_m \cup B)$

$(\bigcap \mathbf{A}) \cap B = \bigcap \big\{(A_\mu \cap B) : \mu \in M\big\}$　すなわち　$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m) \cap B = (A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) \cap \cdots \cap (A_m \cap B)$

(2) 分配法則

$(\bigcup \mathbf{A}) \cap B = \bigcup \big\{(A_\mu \cap B) : \mu \in M\big\}$　すなわち　$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_m \cap B)$

$(\bigcap \mathbf{A}) \cup B = \bigcap \big\{(A_\mu \cup B) : \mu \in M\big\}$　すなわち　$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m) \cup B = (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \cdots \cap (A_m \cup B)$

(3) de Morgan の法則

$(\bigcup \mathbf{A})' = \bigcap \big\{A'_\mu : \mu \in M\big\}$　すなわち　$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m)' = A'_1 \cap A'_2 \cap \cdots \cap A'_m$

$(\bigcap \mathbf{A})' = \bigcup \big\{A'_\mu : \mu \in M\big\}$　すなわち　$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m)' = A'_1 \cup A'_2 \cup \cdots \cup A'_m$

［例題 7］ 全体集合 $X = \{x : (1 \leq x \leq 9) \wedge (x \in \mathbf{R})\}$ があるとき、その部分集合の一つの集合族を

$\mathbf{A} = \{A_\mu : \mu \in \{1, 2\}\}$ とする。

ただし

$A_1 = \{x : (1 \leq x \leq 3) \wedge (x \in \mathbf{R})\}$

$A_2 = \{x : (2 \leq x \leq 4) \wedge (x \in \mathbf{R})\}$

である。

一つの集合 $B = \{x : (2 \leq x \leq 6) \wedge (x \in \mathbf{R})\}$ が与えられたとき、

$(\bigcup \mathbf{A}) \cup B$ ならびに $(\bigcup \mathbf{A})' \cup B$ をそれぞれ求めよ。

（解）

$$
\begin{aligned}
&(\textstyle\bigcup \mathbf{A}) \cup B = (A_1 \cup A_2) \cup B \\
&= \Big(\{x : (1 \leq x \leq 3) \wedge (x \in \mathbf{R})\} \cup \{x : (2 \leq x \leq 4) \wedge (x \in \mathbf{R})\}\Big) \cup \{x : (2 \leq x \leq 6) \wedge (x \in \mathbf{R})\} \\
&= \{x : (1 \leq x \leq 4) \wedge (x \in \mathbf{R})\} \cup \{x : (2 \leq x \leq 6) \wedge (x \in \mathbf{R})\} \\
&= \{x : (1 \leq x \leq 6) \wedge (x \in \mathbf{R})\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\textstyle\bigcup \mathbf{A})' \cup B = (A_1 \cup A_2)' \cup B \\
&= \Big(\{x : (1 \leq x \leq 3) \wedge (x \in \mathbf{R})\} \cup \{x : (2 \leq x \leq 4) \wedge (x \in \mathbf{R})\}\Big)' \cup \{x : (2 \leq x \leq 6) \wedge (x \in \mathbf{R})\} \\
&= \{x : (1 \leq x \leq 4) \wedge (x \in \mathbf{R})\}' \cup \{x : (2 \leq x \leq 6) \wedge (x \in \mathbf{R})\} \\
&= \{x : (4 < x \leq 9) \wedge (x \in \mathbf{R})\} \cup \{x : (2 \leq x \leq 6) \wedge (x \in \mathbf{R})\} \\
&= \{x : (2 \leq x \leq 9) \wedge (x \in \mathbf{R})\}
\end{aligned}
$$

集合族の像

集合 X から Y への写像 f があるとき、つぎの公式が成り立つ。

X の部分集合の一つの集合族　$\mathbf{A} = \{A_\mu : \mu \in M\} = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$

Y の部分集合の一つの集合族　$\mathbf{B} = \{B_\mu : \mu \in M\} = \{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$

に対して、

(1) $f(\bigcup \mathbf{A}) = \bigcup\{f(A_\mu) : \mu \in M\}$　すなわち　$f(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup \cdots \cup f(A_m)$

(2) $f(\bigcap \mathbf{A}) \subset \bigcap\{f(A_\mu) : \mu \in M\}$　すなわち　$f(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m) \subset f(A_1) \cap f(A_2) \cap \cdots \cap f(A_m)$

(3) $f^{-1}(\bigcup \mathbf{B}) = \bigcup\{f^{-1}(B_\mu) : \mu \in M\}$　すなわち　$f^{-1}(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \cup \cdots \cup f^{-1}(B_m)$

(4) $f^{-1}(\bigcap \mathbf{B}) = \bigcap\{f^{-1}(B_\mu) : \mu \in M\}$　すなわち　$f^{-1}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_m) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(B_m)$

［例］

整数の全体集合 X があるとき、写像 f による像 $Y = f(X)$ が

$Y = \{y : (y = f(x)) \wedge (x \in \mathbf{Z})\}$

で与えられるとする。

そこで

X のある部分集合族を　$\{A_1, A_2\}$

Y のある部分集合族を　$\{B_1, B_2\}$
で表し、
$f(x) = (x-3)^2$
$A_1 = \{-2,-1,0,1,2,3\}$　ならびに　$A_2 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$B_1 = \{0,1,4,9,16\}$　ならびに　$B_2 = \{4,9,16,25,36\}$
とする。

(1) $f(\bigcup\{A_1, A_2\}) = \bigcup\{f(A_1), f(A_2)\}$　について

$\bigcup\{A_1, A_2\} = A_1 \cup A_2 = \{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$　より
左辺 $= f(A_1 \cup A_2) = f(\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}) = \{0,1,4,9,16,25\}$
右辺 $= \bigcup\big\{f(\{-2,-1,0,1,2,3\}),\ f(\{1,2,3,4,5,6,7\})\big\} = \bigcup\big\{\{0,1,4,9,16,25\},\ \{0,1,4,9,16\}\big\} = \{0,1,4,9,16,25\}$
すなわち　左辺 $=$ 右辺

(2) $f(\bigcap\{A_1, A_2\}) \subset \bigcap\{f(A_1), f(A_2)\}$　について

$\bigcap\{A_1, A_2\} = A_1 \cap A_2 = \{1,2,3\}$　より
左辺 $= f(A_1 \cap A_2) = f(\{1,2,3\}) = \{0,1,4\}$
右辺 $= \bigcap\big\{f(\{-2,-1,0,1,2,3\}),\ f(\{1,2,3,4,5,6,7\})\big\} = \bigcap\big\{\{0,1,4,9,16,25\},\ \{0,1,4,9,16\}\big\} = \{0,1,4,9,16\}$
すなわち　左辺 $\subset$ 右辺

(3) $f^{-1}(\bigcup\{B_1, B_2\}) = \bigcup\{f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2)\}$　について

$\bigcup\{B_1, B_2\} = B_1 \cup B_2 = \{0,1,4,9,16,25,36\}$　より
左辺 $= f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(\{0,1,4,9,16,25,36\}) = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$f^{-1}(B_1) = f^{-1}(\{0,1,4,9,16\}) = \{-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$
$f^{-1}(B_2) = f^{-1}(\{4,9,16,25,36\}) = \{-3,-2,-1,0,1,5,6,7,8,9\}$　より
右辺$=\bigcup\{f^{-1}(B_1),\ f^{-1}(B_2)\} = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
すなわち　左辺 $=$ 右辺

(4) $f^{-1}(\bigcap\{B_1, B_2\}) = \bigcap\{f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2)\}$　について

$\bigcap\{B_1, B_2\} = B_1 \cap B_2 = \{4,9,16\}$　より
左辺 $= f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(\{4,9,16\}) = \{-1,0,1,5,6,7\}$

$f^{-1}(B_1) = f^{-1}(\{0,1,4,9,16\}) = \{-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$
$f^{-1}(B_2) = f^{-1}(\{4,9,16,25,36\}) = \{-3,-2,-1,0,1,5,6,7,8,9\}$　より
右辺$=\bigcap\{f^{-1}(B_1),\ f^{-1}(B_2)\} = \{-1,0,1,5,6,7\}$
すなわち　左辺 $=$ 右辺

[例題 8] 実数の全体集合 X があるとき、写像 f による像 $Y = f(X)$ が $Y = \{y : (y = x^2) \wedge (x \in \mathbf{R})\}$ で与えられている。
X の部分集合のある一つの集合族 $\mathbf{A}$ を
$\mathbf{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$
$= \big\{\{x : (-3 \le x \le 2) \wedge (x \in \mathbf{R})\},\ \{x : (-1 \le x \le 4) \wedge (x \in \mathbf{R})\},\ \{x : (0 \le x \le 2) \wedge (x \in \mathbf{Z})\}\big\}$　とするとき、
$\bigcup\{f(A_\mu) : \mu \in \{1,2,3\}\}$　ならびに　$\bigcap\{f(A_\mu) : \mu \in \{1,2,3\}\}$　をそれぞれ求めよ。

（解）
$\bigcup\{f(A_\mu) : \mu \in \{1,2,3\}\} = \bigcup\{f(A_1), f(A_2), f(A_3)\}$
$= \bigcup\big\{f(\{x : (-3 \le x \le 2) \wedge (x \in \mathbf{R})\}),\ f(\{x : (-1 \le x \le 4) \wedge (x \in \mathbf{R})\}),\ f(\{x : (0 \le x \le 2) \wedge (x \in \mathbf{Z})\})\big\}$
$= \bigcup\big\{\{y : (0 \le y \le 9) \wedge (y \in \mathbf{R})\},\ \{y : (0 \le y \le 16) \wedge (y \in \mathbf{R})\},\ \{0,1,4\}\big\}$
$= \{y : (0 \le y \le 16) \wedge (y \in \mathbf{R})\}$

$\bigcap\{f(A_\mu) : \mu \in \{1,2,3\}\} = \bigcap\{f(A_1), f(A_2), f(A_3)\}$
$= \bigcap\big\{f(\{x : (-3 \le x \le 2) \wedge (x \in \mathbf{R})\}),\ f(\{x : (-1 \le x \le 4) \wedge (x \in \mathbf{R})\}),\ f(\{x : (0 \le x \le 2) \wedge (x \in \mathbf{Z})\})\big\}$
$= \bigcap\big\{\{y : (0 \le y \le 9) \wedge (y \in \mathbf{R})\}, \{y : (0 \le y \le 16) \wedge (y \in \mathbf{R})\},\ \{0,1,4\}\big\}$
$= \{0,1,4\}$