

相対論 (Theory of Relativity)

1. Galilei 変換

相対論には特殊相対論と一般相対論がある。本稿においては特殊相対論に限定して論述する。なお 相対論は相対性理論とも呼ばれる。

古典力学において、粒子の運動は次のような Newton(ニュートン) 方程式によって規定される。

$$m\mathbf{a} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad \left(\text{ただし } \mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right) \quad (1)$$

ここで m は粒子の質量、 $\mathbf{a}$ は加速度、 $\mathbf{r}$ は位置ベクトル、 t は時間、 $\mathbf{F}$ は粒子に作用する力である。本稿においてベクトル量は太文字の記号で表す。Newton 方程式 (1) は古典力学の基本方程式である。三次元ユークリッド空間内において、基準とする直交座標系 (xyz 系) を設定すると、Newton 方程式 (1) を次式のように直交座標成分 x, y, z を用いて記せる。

$$ma_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad ma_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad ma_z = m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z \quad (2)$$

ただし a_x, a_y, a_z はそれぞれ x, y, z 軸方向の加速度 $\mathbf{a}$ の成分であり、 F_x, F_y, F_z はそれぞれ x, y, z 軸方向の力 $\mathbf{F}$ の成分である。ここで 粒子の位置座標 x, y, z は、それぞれ時間 t を独立変数とする関数である。Newton 方程式 (2) は、粒子の位置座標 x, y, z を未知関数とする二階常微分方程式である。方程式 (2) を満たす関数の解を求めることにより、粒子の運動が定められる。すなわち 粒子の位置 x, y, z をそれぞれ時間 t の関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ として求めると、粒子の運動する軌道が決まる。

Newton 方程式 (2) は、Galilei(ガリレイ) 変換と呼ばれる座標系の変換則に対して不変である。基準としての xyz 系に対して $x'y'z'$ 系が速度 v でもって x 軸の正の向きに等速度運動しているとき、Galilei 変換は次式のように記せる。ここでは xyz 系と $x'y'z'$ 系の各座標軸はそれぞれ互いに平行となるように設定する。

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (3)$$

ただし x', y', z' や t' は、 $x'y'z'$ 系から観測したときの粒子の位置座標や時間を示す。式 (3) を Newton 方程式 (2) に代入すると

$$ma'_x = m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = F_x, \quad ma'_y = m \frac{d^2 y'}{dt'^2} = F_y, \quad ma'_z = m \frac{d^2 z'}{dt'^2} = F_z \quad (4)$$

となる。この式 (4) は式 (2) と同じ形を保っているので、確かに Newton 方程式 (2) は Galilei 変換 (3) に対して不変となっている。ただし a'_x, a'_y, a'_z は $x'y'z'$ 系から観測したときの粒子の加速度である。ここで基準系とは、観測者が固定されている座標系である。観測者が xyz 系に固定されているとき、観測者は自身の座標系である xyz 系の速度を感知し得ないので、その系は相対的に静止系となる。Galilei 変換 (3) において、時間 t は独立のパラメーターであり、時刻の歩度が観測者の位置や速度に依存することはない。すなわち Galilei 変換では、時間はどの座標系においても同一の歩度で一様に経過していく量であるとされ、座標系に依存することがない。

古典電磁気学において、原点から発せられた光波の波面を表す方程式は次式によって与えられる。

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (5)$$

式 (5) は、原点を中心とする半径 ct の球面を表す。ここで c は真空中の光速速度であって

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (6)$$

の値をもつ基本定数であり、観測者の座標系に依存するようなことはない。式 (5) は古典電磁気学の基本方程式である Maxwell(マクスウェル) 方程式からの帰結である。真空中の光速速度 c は観測者の速度に依らず常に一定不変であるということは、Michelson-Morley(マイケルソン・モーリー) の実験によって確証されている。したがって 光の波面を $x'y'z'$ 系から観測したときであっても、 xyz 系の式 (5) と同じ形でもって表されなければならない。すなわち 光波の波面を表す方程式 (5) は、座標系の変換に対して不変であることが要請される。しかし Galilei 変換 (3) では、原点から発せられた光波の波面を表す方程式 (5) を不変に保つことができない。式 (5) が Galilei 変換 (3) に対して不変ではないということは、真空中の光速に近いような高速度の場合には、Galilei 変換 (3) は妥当ではないことを示唆している。実際に式 (5) に式 (3) を代入すると $(x' + vt')^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$ となり、 $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$ を得ることが出来ない。このことは古典電磁気学の基本方程式である Maxwell 方程式は、Galilei 変換に対して不変に保つことが出来ないことを示唆している。なお Maxwell 方程式については、本稿において後に論述する。

2 . Lorentz 変換

相対論において、物理法則は Lorentz(ローレンツ) 変換と呼ばれる座標系の変換則のもとで不変でなければならないことが要請される。基準としての xyz 系に対して $x'y'z'$ 系が速度 v でもって x 軸の正の向きに等速度運動しているとき、Lorentz 変換は次式のように記せる。ここでは xyz 系と $x'y'z'$ 系の各座標軸はそれぞれ互いに平行となるように設定する。

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \left(\text{ただし } \beta = \frac{v}{c} \right) \quad (7)$$

ただし c は真空中の光速である。Lorentz 変換 (7) の逆変換は次式によって与えられる。

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{\beta}{c}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (8)$$

ここで

$$0 < \sqrt{1 - \beta^2} \leq 1 \quad (9)$$

である。逆変換 (8) は、 $x'y'z'$ 系を基準系として見たとき、一方の xyz 系は $x'y'z'$ 系に対して、速度 $-v$ でもって x' 軸方向に運動していることを示唆している。すなわち逆変換 (8) は、 $x'y'z'$ 系に観測者が固定されているときの状況を表す。一般に相対論においては、あらゆる運動の基準となるような絶対的な静止系は存在せず、すべての運動は観測者が固定されている座標系によって決まる相対的な概念である。前述したように、観測者が固定されている自身の座標系の速度を感知することは出来ないで、そのような座標系は相対的な静止系とみなされる。どの座標系に観測者を固定するかは全く任意であって、あらゆる座標系はすべて対等である。

Lorentz 変換 (7) と (8) は光波の波面を表す方程式 (5) を不変にする線形変換である。すなわち $x'y'z'$ 系から観測したときの波面の方程式もまた式 (5) と同様の形で表され、

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (10)$$

のように記せる。実際に式 (7) を式 (10) に代入すると

$$\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 + y^2 + z^2 = c^2 \left(\frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 \quad (11)$$

ここで式 (11) の左辺の第一項と右辺の差は

$$\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 - c^2 \left(\frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 = x^2 - c^2 t^2$$

であるから、式 (11) は

$$x^2 - c^2 t^2 + y^2 + z^2 = 0$$

すなわち

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (12)$$

となる。この式 (12) は、前述した xyz 系における波面の方程式 (5) と同一であり、確かに式 (5) が Lorentz 変換 (7) のもとで不変に保たれている。したがって Lorentz 変換は、真空中の光速に近い高速度の領域でも成り立つような変換則になっている。更にこの変換則から、真空中の光速 c を超えるような運動は原理的に不可能であることが結論される。実際に $v > c$ のとき変換則の分母 $\sqrt{1 - \beta^2}$ が虚数になる。Lorentz 変換 (7) は低速度のとき、すなわち $v \ll c$ の極限では $\beta \approx 0$ となり、旧来の Newton 力学における Galilei 変換 (3) に帰着する。

Lorentz 変換 (8) の帰結として、 xyz 系に固定された二点間の距離 Δx を $x'y'z'$ 系から見たとき、その x 方向の距離が短く観測されることが示せる。 xyz 系における x 軸上の二点を x_1, x_2 とし、 $x'y'z'$ 系における x' 軸上の対応する二点を x'_1, x'_2 とするとき、各座標系におけるそれら二点間の距離 $\Delta x, \Delta x'$ は次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 \\ \Delta x' &= x'_2 - x'_1 \end{aligned}$$

そこで xyz 系に固定された二点 x_1, x_2 を、 $x'y'z'$ 系において同時刻 t' で観測すると、式 (8) より

$$x_1 = \frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (13)$$

$$x_2 = \frac{x'_2 + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (14)$$

となる。したがって

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (15)$$

を得る。すなわち xyz 系に固定された二点間の距離 Δx を、 $x'y'z'$ 系から見たときの距離 $\Delta x'$ は、次式によって与えられる。

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \beta^2} \quad (16)$$

また xyz 系に固定された時計の歩度を $x'y'z'$ 系からみたとき、その時計の歩度は遅く観測されることも示せる。 xyz 系における x 軸上に固定された一点で二事象の起きた時刻を t_1, t_2 とし、 $x'y'z'$ 系における x' 軸上の対応する一点で二事象の起きた時刻を t'_1, t'_2 とするとき、各座標系におけるそれら二事象の起きた時刻の間隔すなわち時間をそれぞれ $\Delta t, \Delta t'$ とすると、それらは次式によって与えられる。

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1$$

そこで xyz 系における二事象の起きた時刻 t_1, t_2 を、 $x'y'z'$ 系において固定された一点 x' で観測すると、式 (8) より

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{\beta}{c}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (17)$$

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{\beta}{c}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (18)$$

となる。したがって

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{\beta}{c}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{t'_1 + \frac{\beta}{c}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (19)$$

を得る。すなわち xyz 系の一点に固定された時計の歩度 Δt を、 $x'y'z'$ 系から観測したときの歩度 $\Delta t'$ は次式によって与えられる。

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} \quad (20)$$

次に相対論における粒子の運動量ならびに運動エネルギーについて考える。粒子のもつ運動量 $\mathbf{p}$ やエネルギー E を、Lorentz 変換のもとで不変となるように修正すると、次式のように記せる。

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \left(\text{ただし } \beta^2 = \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right) \quad (21)$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (22)$$

ここで m は粒子の質量、 $\mathbf{v}$ は粒子の速度である。相対論的運動量を与える式 (21) は、 $\mathbf{v}^2 \ll c^2$ のとき、 $\beta^2 \approx 0$ となるので、近似的に

$$\mathbf{p} \approx m\mathbf{v} \quad (23)$$

のように記せる。したがって相対論的運動量は、低速度すなわち $\mathbf{v}^2 \ll c^2$ のとき、Newton 力学における運動量 $m\mathbf{v}$ に帰着する。式 (22) において、粒子の静止状態 $\mathbf{v} = 0$ とすると $\beta^2 = 0$ であるから

$$E = mc^2 \quad (24)$$

となり、静止状態であっても粒子の質量 m に比例するエネルギーをもつことになる。ここで mc^2 は静止エネルギーと呼ばれる。真空中の光速 c は基本定数であるから、式 (24) において c は、質量 m の値とエネルギー E の値を換算する係数の役割をもつこととなり、結局の処、式 (24) は質量 m とエネルギー E の等価性を示すこととなる。したがって 相対論的には正味の運動エネルギー K は、式 (22) から静止エネルギー mc^2 を差し引いて次のように表される。

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2 \quad (25)$$

相対論的エネルギー E を与える式 (22) において、低速度すなわち $v^2 \ll c^2$ のとき、 β^2 について級数展開し、 β^2 の一次までの近似をとると

$$E \approx mc^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + mc^2 \left[-\frac{(-1)}{2}(1-0)^{-\frac{3}{2}} \right] \beta^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (26)$$

となる。このとき式 (26) の第 1 項は静止状態のエネルギー (質量との等価性) であり、第 2 項は Newton 力学において既に知られている運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ に該当する。実際に式 (26) より静止エネルギー mc^2 を差し引くと、Newton 力学における運動エネルギー K は

$$K = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - mc^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad (27)$$

のように得られる。

[注] 関数 $f(x)$ において、変数 x が極めて 0 に近いとき、次のような級数展開の公式が利用できる。

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$\text{例えば } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ のとき } x \text{ の一次までの近似では } f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x \text{ となる。}$$

式 (21) と式 (22) より、 β^2 を消去すると、次式のように相対論的エネルギー E と相対論的運動量 $\mathbf{p}$ の関係が得られる。

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2 \quad (28)$$

運動量 $\mathbf{p}$ の直交座標成分 p_x, p_y, p_z を用いると、式 (28) は

$$\frac{E^2}{c^2} - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = m^2c^2 \quad (29)$$

のように記せる。

3 . 物理法則の 4 次元定式化

原点から発せられた光波の波面を表す方程式 (5) は、次式のように記せる。

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (30)$$

そこで

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad \text{ならびに} \quad x_0 = ct, \quad x_1 = -x, \quad x_2 = -y, \quad x_3 = -z \quad (31)$$

とすると式 (30) は

$$x^0x^0 - x^1x^1 - x^2x^2 - x^3x^3 = x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3 = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = 0 \quad (32)$$

となるので、結局

$$\sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = 0 \quad (33)$$

のように、和記号のみでもって簡潔に記せる。式 (31) における 4 個の座標変数を x^μ または x_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) を 4 元座標と呼ぶ。すなわち 4 元座標の各成分をあらわに表記すると

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad \text{ならびに} \quad x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (34)$$

となる。ここで x^0 と x_0 は時間成分であり、 x^1, x^2, x^3 ならびに x_1, x_2, x_3 は空間成分を表す。上付き添え字の成分 x^μ は反変成分、下付き添え字の成分 x_μ は共変成分と呼ばれる。このような 4 元座標 x^μ ならびに x_μ で指定される 4 次元擬空間のことを Minkowski (ミンコフスキー) 空間という。ここで「擬空間」とは、ノルムと呼ばれる距離の二乗に該当する量が必ずしも正の値とは限らず、負の値もとれるような抽象的な擬似的空間の総称である。このとき x^μ または x_μ は、Minkowski 空間内の一つのベクトルの座標軸方向の成分と解釈できる。Minkowski 空間内のベクトルは 4 元ベクトルと呼ばれ、必ず 4 個の成分をもつ。Minkowski 空間の距離の二乗すなわちノルム s^2 は次式によって定義される。

$$s^2 = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 \quad (35)$$

式 (35) において、Minkowski 空間の距離の二乗 $s^2 = 0$ のとき、これは 4 次元擬空間内における光の波面を表し、光円錐面と呼ばれる。 $s^2 > 0$ を満たす領域は光速 c より小さい領域を表し、時間的と呼ばれる。 $s^2 < 0$ を満たす領域は光速 c より大きい領域を表し、空間的と呼ばれる。あらゆる物理的作用は時間的な領域内のみ及び、空間的領域内に作用が及ぶことはあり得ない。これは真空中の光速 c があらゆる作用の伝わる速さの上限であることに起因している。光円錐面 $s^2 = 0$ は、Minkowski 空間内において時間的領域と空間的領域の境界を与える。このように Minkowski 空間は時間的領域と空間的領域の二つの領域から成っている。

相対論的エネルギーと相対論的運動量の関係式 (29) についても、4 次元形式で表示できる。すなわち

$$\frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2 c^2 \quad (36)$$

において

$$p^0 = \frac{E}{c}, \quad p^1 = p_x, \quad p^2 = p_y, \quad p^3 = p_z \quad \text{ならびに}$$

$$p_0 = \frac{E}{c}, \quad p_1 = -p_x, \quad p_2 = -p_y, \quad p_3 = -p_z$$

とすると、式 (36) は

$$p^0 p_0 - p^1 p_1 - p^2 p_2 - p^3 p_3 = p^0 p_0 + p^1 p_1 + p^2 p_2 + p^3 p_3 = \sum_{\mu=0}^3 p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \quad (37)$$

となるので、結局

$$\sum_{\mu=0}^3 p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \quad (38)$$

のように、和記号のみでもって簡潔に記せる。ここで p^μ ならびに p_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) は 4 元運動量と呼ばれる。すなわち 4 元運動量の各成分をあらわに表記すると

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) \quad \text{ならびに} \quad p_\mu = (p_0, p_1, p_2, p_3) \quad (39)$$

となる。式 (38) より、 $m^2 c^2$ は 4 元運動量の大きさの二乗を与える。4 元運動量 p^μ と p_μ において、 p^0 ならびに p_0 は 4 元運動量の時間成分であるが、これは通常の 3 次元空間内ではエネルギー項に該当する。4 元運動量 p^μ と p_μ の空間成分 p^1, p^2, p^3 ならびに p_1, p_2, p_3 が通常の 3 次元空間内の運動量を与える。

4 元座標や 4 元運動量などは、数学的には 4 元ベクトルと呼ばれるものに属する。一般に Minkowski 空間における 4 元ベクトルの成分を A^μ ならびに A_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) とするとき、それらの各成分をあらわに表記すると

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \quad \text{ならびに} \quad A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) \quad (40)$$

となる。このとき

$$A^0 A_0 - A^1 A_1 - A^2 A_2 - A^3 A_3 = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu A_\mu \quad (41)$$

は、4 元ベクトルの長さの二乗を与える。上付き添え字の A^μ は反変ベクトル、下付き添え字の A_μ は共変ベクトルと呼ばれる。

「Einstein(アインシュタイン)の規約」と呼ばれる表記法を用いると

$$\sum_{\mu=0}^3 A^\mu A_\mu = A^\mu A_\mu \quad (42)$$

のように表せる。ここで $A^\mu A_\mu$ と $A_\mu A^\mu$ は等しい。すなわち Einstein の規約では、上下に付く同一記号のギリシャ文字の添え字については 0 から 3 までの和をとり、記号 $\sum$ を省く。例えば二つの 4 元ベクトルの成分をそれぞれ A^μ, B_μ とするとき、 $A^\mu B_\mu$ は

$$A^\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 \quad (43)$$

を意味し、これは 4 元ベクトル A^μ と B_μ の内積を表す。

Einstein の規約を用いると、式 (35) の 4 次元擬空間内の距離の二乗 s^2 は、次のように簡潔に表すことができる。

$$s^2 = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 = x^\mu x_\mu \quad (44)$$

すなわち

$$s^2 = x^\mu x_\mu \quad (45)$$

のように記せる。また 相対論的エネルギーの二乗 E^2 と相対論的運動量の二乗 p^2 の間の関係式 (38) についても同様に簡潔に表せる。

$$m^2 c^2 = p^0 p_0 + p^1 p_1 + p^2 p_2 + p^3 p_3 = p^\mu p_\mu \quad (46)$$

すなわち

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \quad (47)$$

のように記せる。

Lorentz 変換 (7) を 4 次元形式で表現すると、次式のような 4 行 4 列の行列で記せる。このとき 4 元座標 x^μ ならびに $x^{\mu'}$ については、4 行 1 列の行列で記す。

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (48)$$

ただし

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (49)$$

である。ここで $x'y'z'$ 系と xyz 系の各座標軸は、それぞれ互いに平行かつ $x'y'z'$ 系は xyz 系に対して速度 v で x 軸方向に等速度運動しているとする。

xyz 系における 4 元ベクトルを A^μ 、その系に対して x 軸方向に速度 v で等速度運動している $x'y'z'$ 系で観測したときの 4 元ベクトルを $A^{\mu'}$ とすると、これらの間の関係は次のような Lorentz 変換に従う。

$$\begin{pmatrix} A^{0'} \\ A^{1'} \\ A^{2'} \\ A^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \quad (50)$$

ここで 4 元ベクトル $A^\mu, A^{\mu'}$ については、4 行 1 列の行列でもって表す。一般に Lorentz 変換のもとで 4 元ベクトルの内積 $A^\mu B_\mu$ は不変である。したがって 4 元ベクトルの二乗 $A^\mu A_\mu$ も Lorentz 変換のもとで不変である。

計量テンソルと呼ばれる次のような行列 $g_{\mu\nu}$ を導入すると便利である。

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

この計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いると、4 元ベクトルの内積 $A^\mu B_\mu$ は、反変ベクトル A^μ と B^μ のみを用いて次式のように記せる。

$$A^\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 \quad (52)$$

$$= \begin{pmatrix} A^0 & A^1 & A^2 & A^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^0 \\ B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix} = A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu \quad (53)$$

ここで 4 元ベクトル A^μ は 1 行 4 列の行列、 B^μ は 4 行 1 列の行列で表示している。
したがって 式 (53) を成分間の関係式として簡潔に表記すると

$$A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \quad (54)$$

となる。前述の式 (45) や式 (47) についても同様にして、

$$x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = s^2, \quad p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = mc^2 \quad (55)$$

のように記してよい。なお s^2 ならびに mc^2 は、Lorentz 変換のもとで不変な量である。

4 . Maxwell 方程式

Maxwell(マクスウェル) 方程式は電磁気学における基本方程式系であって、次式のように記せる。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (56)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (57)$$

ただし ϕ や $\mathbf{A}$ は、それぞれスカラーポテンシャルならびにベクトルポテンシャルと呼ばれる場の量であって、時間 t ならびに空間座標 x, y, z の関数である。また c は真空中の光速であり、 ϵ_0 や μ_0 はそれぞれ真空誘電率ならびに真空透磁率と呼ばれる基本定数である。ここで Δ は次式で定義される微分演算子である。

(Δ の呼称は「ラプラシアン」)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (\text{ただし 直交座標表示の場合}) \quad (58)$$

式 (56) (57) における ρ ならびに $\mathbf{j}$ は、それぞれ電荷密度ならびに電流密度と呼ばれ、荷電粒子に由来する量である。Maxwell 方程式は、電磁波すなわち光波の伝播などの電磁気現象を規定する。一般に、ある物理量が空間領域内において、座標 x, y, z の関数 $f(x, y, z)$ で与えられるとき、この $f(x, y, z)$ のことを物理量の場 (field) という。場の概念は粒子の概念に対峙して用いられることもある。ここでは ϕ ならびに $\mathbf{A}$ がそれぞれスカラーポテンシャル場ならびにベクトルポテンシャル場となっている。また電荷密度 ρ や電流密度 $\mathbf{j}$ が 0 のときであっても、場 ϕ や $\mathbf{A}$ は 0 とは限らない。すなわち電荷密度や電流密度の有無にかかわらず、場 ϕ や $\mathbf{A}$ は独立の物理的実体 (波動場) として存在し得る。電荷密度 ρ や電流密度 $\mathbf{j}$ が 0 のときは、場 ϕ や $\mathbf{A}$ は荷電粒子と相互作用をもたないため、自由場と呼ばれる。このような観点において、Maxwell 方程式は場の挙動を規定する基本方程式系の一つである。Maxwell 方程式 (56) (57) を直交座標成分を用いて表すと、次式のように記せる。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (59)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = \mu_0 j_x \quad (60)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = \mu_0 j_y \quad (61)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = \mu_0 j_z \quad (62)$$

ただし A_x, A_y, A_z はベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の直交座標成分であり、 j_x, j_y, j_z は電流密度 $\mathbf{j}$ の直交座標成分である。ここで ϕ と $\mathbf{A}$ の間には、次式のような関係がある。

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\operatorname{div} \text{の呼称は「ダイバージェンス」}) \quad (63)$$

この関係式 (63) は Lorentz(ローレンツ) 条件または Lorentz ゲージと呼ばれる。式 (63) を直交座標成分を用いて表すと、次式のように記せる。

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (64)$$

スカラーポテンシャル ϕ ならびにベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ が求められると、実際に観測される物理量である電場 $\mathbf{E}$ や磁束密度の場 $\mathbf{B}$ は次式によって与えられる。

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (\operatorname{grad} \text{の呼称は「グラジエント」}) \quad (65)$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (\operatorname{rot} \text{の呼称は「ローテーション」}) \quad (66)$$

電場 $\mathbf{E}$ や磁束密度の場 $\mathbf{B}$ は直接的に観測され得る量であって、これは力の場に関与する量である。すなわち電場 $\mathbf{E}$ は荷電粒子に電氣的な力を及ぼし、磁束密度の場 $\mathbf{B}$ は電流 (荷電粒子の流れ) に磁氣的な力を及ぼす。

式 (65) (66) を直交座標成分を用いて表すと、次式のように記せる。

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t}, \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \quad (67)$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (68)$$

ただし E_x, E_y, E_z は電場 $\mathbf{E}$ の直交座標成分であり、 B_x, B_y, B_z は磁束密度 $\mathbf{B}$ の直交座標成分である。

電場 $\mathbf{E}$ や磁束密度 $\mathbf{B}$ は次式で表されるような変換に対して不変である。

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \xi \quad (69)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (70)$$

ただし ξ は任意のスカラーであって、空間座標 x, y, z や時間 t の関数である。式 (69) (70) で表される変換のことをゲージ (gauge) 変換という。式 (69) を直交座標成分を用いて表すと、次式のように記せる。

$$A'_x = A_x + \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad A'_y = A_y + \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad A'_z = A_z + \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (71)$$

Maxwell 方程式 (56), (57) を解いて、ポテンシャルの場 $\phi, \mathbf{A}$ が求められれば式 (65) (66) より電場 $\mathbf{E}$ や磁束密度の場 $\mathbf{B}$ が定まる。前述したように、これら電場 $\mathbf{E}$ や磁束密度の場 $\mathbf{B}$ は電荷や電流に作用する力の場を与え、直接に観測される量である。これに対して、 ϕ ならびに $\mathbf{A}$ のようなポテンシャルの場は空間に内在する潜在的なエネルギーに関係する場であって、理論的計算において主に用いられる。なお力の場を直接的に与える $\mathbf{E}$ や $\mathbf{B}$ よりも、ポテンシャル場 ϕ や $\mathbf{A}$ の方が本質的であり、基本的な量であると考えられている。

前述した Maxwell 方程式 (56) (57) は、電場 $\mathbf{E}$ や磁束密度の場 $\mathbf{B}$ を用いて表すと、次式のように記せる。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (72)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (73)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (74)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (75)$$

歴史的には、式 (72) (73) (74) (75) が主に Maxwell 方程式と呼ばれ、これらの方程式系に対して式 (63) (65) (66) を用いることで、前述した方程式系 (56) (57) が導出される。ここで 真空誘電率 ϵ_0 と真空透磁率 μ_0 の間には、

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (76)$$

の関係が成り立つ。ただし c は真空中の光速である。

Maxwell 方程式 (72) (73) (74) (75) を直交座標成分を用いて表すと次式のように記せる。

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (77)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0 j_x, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \mu_0 j_y, \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \mu_0 j_z \quad (78)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (79)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \quad (80)$$

電荷密度 ρ と電流密度 $\mathbf{j}$ の間には、次式のような関係がある。

$$\text{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (81)$$

式 (81) を直交座標成分を用いて表すと、次式のように記せる。

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (82)$$

式 (81) ならびに式 (82) は電荷が保存することを示しており、電荷保存則と呼ばれる。

5 . 荷電粒子に作用する力

荷電粒子が、電場 $\mathbf{E}$ から受ける力 $\mathbf{F}_E$ は次式によって与えられる。

$$\mathbf{F}_E = q\mathbf{E} \quad (83)$$

ただし q は荷電粒子のもつ電荷である。式 (83) より、荷電粒子が電場から受ける力は、電場 $\mathbf{E}$ と同方向であって、その大きさ E に比例している。電場 $\mathbf{E}$ は単位電荷あたりに作用する力と解釈できる。式 (83) を直交座標成分を用いて表すと、次式のように記せる。

$$F_{Ex} = qE_x, \quad F_{Ey} = qE_y, \quad F_{Ez} = qE_z \quad (84)$$

ただし E_{Ex}, E_{Ey}, E_{Ez} は、力 $\mathbf{F}_E$ の直交座標成分である。

荷電粒子が、磁束密度 $\mathbf{B}$ から受ける力 $\mathbf{F}_B$ は、荷電粒子の速度 $\mathbf{v}$ に依存し、次式によって与えられる。

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (85)$$

ここで積の演算記号 $\times$ はベクトルの外積を表す。式 (85) より、荷電粒子が、磁束密度 $\mathbf{B}$ から受ける力 $\mathbf{F}_B$ は、速度 $\mathbf{v}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ の双方に対して常に直角な方向となる。式 (85) における $\mathbf{F}_B$ は、Lorentz 力と呼ばれる。式 (85) を直交座標成分を用いて表すと、次式のように記せる。

$$F_{Bx} = q(v_y B_z - v_z B_y), \quad F_{By} = q(v_z B_x - v_x B_z), \quad F_{Bz} = q(v_x B_y - v_y B_x) \quad (86)$$

ただし F_{Bx}, F_{By}, F_{Bz} は力 $\mathbf{F}_B$ の直交座標成分であり、 v_x, v_y, v_z は速度 $\mathbf{v}$ の直交座標成分である。

Lorentz 力の大きさ F_B は、

$$F_B = qvB \sin \theta \quad (87)$$

となる。ただし θ は速度 $\mathbf{v}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ のなす角である。式 (87) より、速度 $\mathbf{v}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ が互いに同方向のとき、力 F_B は零となる。速度 $\mathbf{v}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ が互いに直角となるとき、 F_B は最大値 qvB となる。

荷電粒子が電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ の双方から受ける力 $\mathbf{F}$ は式 (83) と式 (85) より

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (88)$$

となる。

6 . Maxwell 方程式の 4 次元形式

電磁気学の基本方程式である Maxwell 方程式についても 4 次元形式で表すことができる。Maxwell 方程式は、式 (56) (57) で論述したように次式のように記せた。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (89)$$

ここで 次のような 4 元ベクトルの微分演算子を導入する。

$$\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (90)$$

$$\partial^\mu = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (91)$$

このような 4 元ベクトルの微分演算子を用いると、内積 $\partial_\mu \partial^\mu$ は

$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial_0 \partial^0 + \partial_1 \partial^1 + \partial_2 \partial^2 + \partial_3 \partial^3 = \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (92)$$

となる。ただし 前述したように 4 元座標は

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad \text{ならびに} \quad x_0 = ct, \quad x_1 = -x, \quad x_2 = -y, \quad x_3 = -z \quad (93)$$

によって定義される。そこで Maxwell 方程式 (89) を 4 元座標を用いて記すと次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial \phi}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial A_x}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial A_x}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial A_x}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial A_x}{\partial x_3} &= \mu_0 j_x \\ \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial A_y}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial A_y}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial A_y}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial A_y}{\partial x_3} &= \mu_0 j_y \\ \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial A_z}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial A_z}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial A_z}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial A_z}{\partial x_3} &= \mu_0 j_z \end{aligned}$$

そこで

$$A^0 = \frac{1}{c} \phi, \quad A^1 = A_x, \quad A^2 = A_y, \quad A^3 = A_z \quad (94)$$

$$j^0 = c\rho, \quad j^1 = j_x, \quad j^2 = j_y, \quad j^3 = j_z, \quad \text{ならびに} \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad (95)$$

とすると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) A^0 &= \mu_0 j^0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) A^1 &= \mu_0 j^1 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) A^2 &= \mu_0 j^2 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) A^3 &= \mu_0 j^3 \end{aligned}$$

となるので、式 (92) を用いると、これら四つの方程式系は次のように簡潔に記せる。

$$\partial_\mu \partial^\mu A^0 = \mu_0 j^0, \quad \partial_\mu \partial^\mu A^1 = \mu_0 j^1, \quad \partial_\mu \partial^\mu A^2 = \mu_0 j^2, \quad \partial_\mu \partial^\mu A^3 = \mu_0 j^3 \quad (96)$$

さらにこれら四つの方程式系 (96) は、次のように一つの方程式にまとめられる。

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad (97)$$

結局、式 (97) が 4 次元形式で表した Maxwell 方程式 (89) である。

電場 $\mathbf{E}$ や磁束密度 $\mathbf{B}$ についても 4 次元形式で表すことができる。電場や磁束密度の式 (65) (66) については、直交座標成分で表すと式 (67) (68) で示したように、次式のように記せた。

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}, \quad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t}, \quad E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \quad (98)$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (99)$$

4 元座標については、式 (31) において前述したように

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad \text{ならびに} \quad x_0 = ct, \quad x_1 = -x, \quad x_2 = -y, \quad x_3 = -z \quad (100)$$

によって定義された。そこで 式 (98) (99) を 4 元座標 (x_0, x_1, x_2, x_3) を用いて記すと次式のようになる。

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x_1} - c \frac{\partial A_x}{\partial x_0}, & E_y &= \frac{\partial\phi}{\partial x_2} - c \frac{\partial A_y}{\partial x_0}, & E_z &= \frac{\partial\phi}{\partial x_3} - c \frac{\partial A_z}{\partial x_0} \\ B_x &= -\frac{\partial A_z}{\partial x_2} + \frac{\partial A_y}{\partial x_3}, & B_y &= -\frac{\partial A_x}{\partial x_3} + \frac{\partial A_z}{\partial x_1}, & B_z &= -\frac{\partial A_y}{\partial x_1} + \frac{\partial A_x}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (101)$$

そこで

$$A^0 = \frac{1}{c}\phi, \quad A^1 = A_x, \quad A^2 = A_y, \quad A^3 = A_z$$

とすると

$$\begin{aligned} E_x &= c \frac{\partial A^0}{\partial x_1} - c \frac{\partial A^1}{\partial x_0}, & E_y &= c \frac{\partial A^0}{\partial x_2} - c \frac{\partial A^2}{\partial x_0}, & E_z &= c \frac{\partial A^0}{\partial x_3} - c \frac{\partial A^3}{\partial x_0} \\ B_x &= -\frac{\partial A^3}{\partial x_2} + \frac{\partial A^2}{\partial x_3}, & B_y &= -\frac{\partial A^1}{\partial x_3} + \frac{\partial A^3}{\partial x_1}, & B_z &= -\frac{\partial A^2}{\partial x_1} + \frac{\partial A^1}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (102)$$

すなわち

$$\begin{aligned} F^{01} &= \frac{E_x}{c} = -\left(\frac{\partial A^1}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_1}\right), & F^{02} &= \frac{E_y}{c} = -\left(\frac{\partial A^2}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_2}\right), & F^{03} &= \frac{E_z}{c} = -\left(\frac{\partial A^3}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_3}\right) \\ F^{23} &= B_x = -\left(\frac{\partial A^3}{\partial x_2} - \frac{\partial A^2}{\partial x_3}\right), & F^{13} &= B_y = \frac{\partial A^3}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_3}, & F^{12} &= B_z = -\left(\frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_3}\right) \end{aligned}$$

を得る。

結局、電場 $\mathbf{E}$ ならびに磁束密度 $\mathbf{B}$ は、次のような一つの 2 階の反対称テンソル $F^{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) として表される。

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \\ &= \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (103)$$

ここで 反対称テンソル $F^{\mu\nu}$ は、添え字の入れ換えに対して符号を変える性質があり、 $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ である。また $F^{\mu\nu}$ の対角成分 ($\mu = \nu$) は零、すなわち $F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0$ である。式 (103) に示されているように、電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ は、4 次元形式においては 4 行 4 列の行列の形にまとめて表記できる。

Maxwell 方程式 (72) と (73) についても、次式のようにまとめて記せる。

$$\frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x^\lambda} = \mu_0 j^\nu, \quad (\text{ただし } \nu, \lambda = 0, 1, 2, 3) \quad (104)$$

Maxwell 方程式 (74) と (75) についても、次式のようにまとめて記せる。

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (\text{ただし } \mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2, 3) \quad (105)$$

ここで $F^{\mu\nu}$ は式 (103) で与えられる反対称テンソルである。

[補遺]

スカラー ϕ が空間の直交座標 x, y, z の関数、すなわちスカラー場 $\phi = \phi(x, y, z)$ があるとき、傾きを表すベクトル場 $\text{grad}\phi$ が次のように定義される。

$$\text{grad}\phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

ただし $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は、それぞれ直交座標系の x, y, z 軸における基本ベクトルである。

基本ベクトルは、大きさ 1 のベクトルであって、直交座標系においては互いに直交する。

すなわち $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ の大きさ $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$ である。

ベクトル $\mathbf{A}$ が空間の直交座標 x, y, z の関数、すなわちベクトル場 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ があるとき、発散を表すスカラー場 $\text{div}\mathbf{A}$ が次のように定義される。

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ただし A_x, A_y, A_z は、ベクトル場 $\mathbf{A}$ の直交座標成分である。

ベクトル $\mathbf{A}$ が空間の直交座標 x, y, z の関数、すなわちベクトル場 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ があるとき、回転を表すベクトル場 $\text{rot}\mathbf{A}$ が次のように定義される。

$$\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

ただし $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は、それぞれ直交座標系の x, y, z 軸における基本ベクトルである。ここで A_x, A_y, A_z は、ベクトル場 $\mathbf{A}$ の直交座標成分である。

[公式]

$$\text{div}(\text{grad}\phi) = \Delta\phi$$

$$\text{rot}(\text{grad}\phi) = 0$$

$$\text{div}(\text{rot}\mathbf{A}) = 0$$

$$\text{rot}\mathbf{A} = 0 \quad \text{ならば、スカラー場 } \phi \text{ が存在して } \mathbf{A} = \text{grad}\phi \text{ が成り立つ。}$$

$$\text{div}\mathbf{A} = 0 \quad \text{ならば、ベクトル場 } \mathbf{B} \text{ が存在して } \mathbf{A} = \text{rot}\mathbf{B} \text{ が成り立つ。}$$

$$\text{ただし } \Delta \text{ はラプラシアンを表し、直交座標表示においては } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ である。}$$