行列

1　行列

行列 matrix

$m \times n$ 個の数 a_{ij} (ただし $i = 1, 2, \cdots, m$ かつ $j = 1, 2, \cdots, n$) の全体を A で表し、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のように a_{ij} を配列したものを、m 行 n 列の行列 あるいは (m, n) 行列という。
ここで 数 a_{ij} を行列 A の成分 (component) といい、横に並んだ数を行 (row)、縦に並んだ数を列 (column) という。
すなわち A の第 i 行は、$a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{ij},\ \cdots,\ a_{in}$ であり、
A の第 j 列は、

$$\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$$

である。
また a_{ij} を A の (i, j) 成分という。

［例］3 行 4 列の行列 あるいは $(3, 4)$ 行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

正方行列 square matrix

行数と列数が等しい行列、すなわち (n, n) 行列を n 次の正方行列という。

［例］$(3, 3)$ 行列すなわち 3 次の正方行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

行ベクトル row vector

一つの行だけからなる行列、すなわち $(1, n)$ 行列を n 次の行ベクトルという。
すなわち n 次の行ベクトルは $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ となる。

［例］$(1, 3)$ 行列すなわち 3 次の行ベクトル
$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$

列ベクトル column vector

一つの列だけからなる行列、すなわち $(m, 1)$ 行列を m 次の列ベクトルという。

すなわち m 次の列ベクトルは

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

となる。

［例］$(3,1)$ 行列すなわち 3 次の列ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

スカラー scalar

一行一列だけからなる行列 すなわち $(1,1)$ 行列をスカラーといい、 いわゆる単なる数 a はスカラーの例である。

行列の相等

行列 A と行列 B がともに同じ (m,n) 行列で、しかも それらの (i,j) 成分 a_{ij} と b_{ij} がすべて互いに等しいとき、
A と B は等しいといい、$A=B$ と記す。
すなわち $A=B$ は $a_{ij}=b_{ij}$ となることである。（ただし $i=1,2,\cdots,m$ かつ $j=1,2,\cdots,n$)

行列の演算

(1) 加法 addition

行列 A と行列 B がともに同じ (m,n) 行列のときに定義され、$a_{ij}+b_{ij}$ を成分とする (m,n) 行列 C を A と B の和といい、$A+B$ で表わす。
すなわち

$$C = A + B$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mj}+b_{mj} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

［例］$(3,4)$ 行列の加法

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 & 2 \\ 8 & 10 & 4 & 6 \\ 1 & 9 & -5 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & 7 & 0 \\ -9 & -4 & 10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 10 & -3 \\ 10 & 15 & 11 & 6 \\ -8 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) スカラーと行列の積

行列 A のすべての成分にスカラー p をかけて得られる行列 $C=pA$ を A の p 倍という。
すなわち

$$C = pA = \begin{pmatrix} pa_{11} & pa_{12} & \cdots & pa_{1j} & \cdots & pa_{1n} \\ pa_{21} & pa_{22} & \cdots & pa_{2j} & \cdots & pa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ pa_{m1} & pa_{m2} & \cdots & pa_{mj} & \cdots & pa_{mn} \end{pmatrix}$$

(3) 行列の差 $A-B$

$A-B=A+(-1)B$ で定義される。

(4) n **次の行ベクトルと** n **次の列ベクトルの積**

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ \cdots\ +a_nb_n$$

すなわち 行ベクトルと列ベクトルの積はスカラーいわゆる $(1,1)$ 行列となる。

［例］3 次の行ベクトルと 3 次の列ベクトルの積

$$(3 \quad -5 \quad 8)\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 3\times 2+(-5)\times 6+8\times 7 \ = \ 32$$

(5) n **次の列ベクトルと** n **次の行ベクトルの積**

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n) = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & b_1a_3 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & b_2a_3 & \cdots & b_2a_n \\ b_3a_1 & b_3a_2 & b_3a_3 & \cdots & b_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & b_na_3 & \cdots & b_na_n \end{pmatrix}$$

すなわち 列ベクトルと行ベクトルの積は n 次の正方行列いわゆる (n,n) 行列となる。

一般に行列の積は、交換則が成り立つとは限らない。

［例］3 次の列ベクトルと 3 次の行ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}(3 \quad -5 \quad 8) = \begin{pmatrix} 2\times 3 & 2\times(-5) & 2\times 8 \\ 6\times 3 & 6\times(-5) & 6\times 8 \\ 7\times 3 & 7\times(-5) & 7\times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 16 \\ 18 & -30 & 48 \\ 21 & -35 & 56 \end{pmatrix}$$

(6) m **次の行ベクトルと** (m,n) **行列の積**

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_m)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= (a_1b_{11}+a_2b_{21}+\cdots+a_mb_{m1} \qquad a_1b_{12}+a_2b_{22}+\cdots+a_mb_{m2} \qquad \cdots\cdots \qquad a_1b_{1n}+a_2b_{2n}+\cdots+a_mb_{mn})$$

すなわち m 次の行ベクトルと (m,n) 行列の積は n 次の行ベクトルとなる。

［例］3 次の行ベクトルと $(3,4)$ 行列の積

$$(3 \quad -5 \quad 8)\begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 & 2 \\ 8 & 10 & 4 & 6 \\ 1 & 9 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$= \big(3\times 5+(-5)\times 8+8\times 1 \qquad 3\times(-3)+(-5)\times 10+8\times 9 \qquad 3\times 7+(-5)\times 4+8\times(-5) \qquad 3\times 2+(-5)\times 6+8\times(-8)\big)$$

$$= (\ -17 \quad 13 \quad -39 \quad -88)$$

(7) (m,n) 行列と n 次の列ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \cdots + a_{mn}b_n \end{pmatrix}$$

すなわち (m,n) 行列と n 次の列ベクトルの積は m 次の列ベクトルとなる。

［例］$(3,4)$ 行列と 3 次の列ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 & 2 \\ 8 & 10 & 4 & 6 \\ 1 & 9 & -5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\times 2 + (-3)\times 6 + 7\times 7 + 2\times 3 \\ 8\times 2 + 10\times 6 + 4\times 7 + 6\times 3 \\ 1\times 2 + 9\times 6 + (-5)\times 7 + (-8)\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 \\ 122 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(8) (m,k) 行列と (k,n) 行列の積

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1k}b_{k1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1k}b_{k2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1k}b_{kn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2k}b_{k1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2k}b_{k2} & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mk}b_{k1} & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \cdots + a_{mk}b_{k2} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + a_{m2}b_{2n} + \cdots + a_{mk}b_{kn} \end{pmatrix}$$

すなわち (m,k) 行列と (k,n) 行列の積は (m,n) 行列となる。

［例］$(3,4)$ 行列と $(4,2)$ 行列の積

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 & 2 \\ 8 & 10 & 4 & 6 \\ 1 & 9 & -5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \\ 4 & 8 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5\times 3 + (-3)\times 6 + 7\times 4 + 2\times 2 & 5\times 5 + (-3)\times 1 + 7\times 8 + 2\times 7 \\ 8\times 3 + 10\times 6 + 4\times 4 + 6\times 2 & 8\times 5 + 10\times 1 + 4\times 8 + 6\times 7 \\ 1\times 3 + 9\times 6 + (-5)\times 4 + (-8)\times 2 & 1\times 5 + 9\times 1 + (-5)\times 8 + (-8)\times 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 29 & 92 \\ 112 & 124 \\ 21 & -82 \end{pmatrix}$$

行列の べき（累乗）power

A が正方行列すなわち (n,n) 行列のとき、k 個の A の積を A^k と記し、これを A の累乗という。

［例］(2, 2) 行列の二乗

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5\times5+3\times8 & 5\times3+3\times1 \\ 8\times5+1\times8 & 8\times3+1\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 18 \\ 48 & 25 \end{pmatrix}$$

転置行列 transposed matrix

行列 A において、行と列を入れ換えた行列のことを、A の転置行列といい、${}^tA$ と記す。すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のとき

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

である。

なお 列ベクトルの転置行列は行ベクトルとなり、行ベクトルの転置行列は列ベクトルとなる

対称行列 symmetric matrix

$A = {}^tA$ が成り立つような行列 A のことをいう。

［例］対称行列

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

行列の対角成分 diagonal element

正方行列 A において、左上から右下に至る対角線上の成分 a_{ii} を A の対角成分という。

例えば

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \text{ の対角成分は、} a,\ b$$
$$\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \text{ の対角成分は、} a,\ b,\ c \text{ である。}$$

対角行列 diagonal matrix

対角成分以外の要素が、すべて零であるような行列のことをいう。

対角行列に関しては $A = {}^tA$ が成り立つ。

［例］対角行列

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

零行列

すべての成分が零であるような行列のことをいい、O で表わす。
すなわち $a_{ij} = 0$ である。
任意の行列 A と零行列 O がともに (m,n) 行列であるとき、

$$\begin{aligned} &A + O = A \\ &A - A = O \end{aligned}$$

が成り立つ。

［例］零行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

単位行列 unit matrix

正方行列において、対角成分がすべて 1 で他の成分がすべて零である行列のことをいい、E で表わす。
すなわち $a_{ij} = \delta_{ij}$ である。
ただし δ_{ij} は Kronecker(クロネッカー) 記号であって
　$i = j$ のとき $\delta_{ij} = 1$
　$i \neq j$ のとき $\delta_{ij} = 0$
を示す。(ただし $i = 1, 2, \cdots, m$ かつ $j = 1, 2, \cdots, n$)
任意の (m,n) 行列を A とし、(m,m) 単位行列を E_m ならびに (n,n) 単位行列を E_n とするとき、

$$\begin{aligned} &AE_n = A \\ &E_m A = A \end{aligned}$$

が成り立つ。

［例］単位行列

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad \text{とするとき、}$$

$$AE_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$E_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

2　行列の演算法則

演算法則

(1) 加法
　$A + B = B + A$　　(交換法則)
　$(A + B) + C = A + (B + C)$　　(結合法則)

(2) スカラー倍　(ただし p, q はスカラー)
　$(p + q)A = pA + qA$　　(分配法則)
　$p(A + B) = pA + pB$　　(分配法則)

$(pq)A = p(qA)$　　(結合法則)

(3) 積

$(AB)C = A(BC)$　　(結合法則)

$A(B + C) = AB + AC$　　(分配法則)

$(A + B)C = AC + BC$　　(分配法則)

$p(AB) = (pA)B = A(pB)$　　(結合法則)

転置行列の性質

(1) ${}^t({}^tA) = A$

(2) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$

(3) ${}^t(pA) = p\,{}^tA$

(4) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

[例題 1] 同じ次数の正方行列 A, B があるとき、つぎの式を展開せよ。

(1) $(A - B)^2$

(2) $(A - B)^3$

（解）

$$\begin{aligned}
(1)\ \ (A - B)^2 &= (A - B)(A - B) \\
&= AA - AB - BA + BB \\
&= A^2 - AB - BA + B^2 \\
(2)\ \ (A - B)^3 &= (A - B)(A^2 - AB - BA + B^2) \\
&= A^3 - A^2B - ABA + AB^2 - BA^2 + BAB + B^2A - B^3
\end{aligned}$$

正則行列 regular matrix

n 次の正方行列 A に対して、$AX = E$ かつ $XA = E$ を同時に満たす正方行列 X が存在するとき、X を A の逆行列といい、A^{-1} と記す。

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

A に逆行列が存在するとき、A は正則 (regular) であるという。

正則行列の性質

A, B ともに n 次の正則行列とすれば、

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(3) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

(4) $(pA)^{-1} = p^{-1}A^{-1}$　(ただし p はスカラー かつ $p \neq 0$)

対角行列の逆行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

[例題 2] 2 次の正則行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

（解）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \quad \text{とおくと} \quad AA^{-1} = E \quad \text{より}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{であるから}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって

$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1$
$a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0$
$a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0$
$a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1$

上記の 4 元連立方程式を解いて、未知数 x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} を求めると A^{-1} の各成分は次のようになる。

$$x_{11} = \frac{a_{22}}{D}$$

$$x_{12} = \frac{-a_{12}}{D}$$

$$x_{21} = \frac{-a_{21}}{D}$$

$$x_{22} = \frac{a_{11}}{D}$$

(ただし $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$)