

数学公式

常微分の定義

一変数関数 $y = f(x)$ とするとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$dy = f'(x) dx$$

[例] $y = x^3$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}x^3 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

$$dy = 3x^2 dx$$

[例] $y = \sqrt{x}$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

様々な関数についての微分

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad (\text{ただし } n \text{ は実数}), \quad \frac{d}{dx}c = 0 \quad (\text{ただし } c \text{ は定数})$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \quad \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x} \quad [\text{注}] \quad e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \cdots = 2.7183 \cdots \quad (\text{無理数})$$

合成関数の微分

関数 $y = f(g(x))$ のとき、 $t = g(x)$ とおくと $y = f(t)$ となるので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \left[\frac{d}{dt}f(t) \right] \left[\frac{d}{dx}g(x) \right]$$

[例] $y = (x^3 + 1)^{10}$ のとき、 $t = x^3 + 1$ とおくと $y = t^{10}$ となるので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \left[\frac{d}{dt}t^{10} \right] \left[\frac{d}{dx}(x^3 + 1) \right] = (10t^9)(3x^2) = 30x^2(x^3 + 1)^9$$

マクローリン展開の公式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \quad (\text{ただし } n \text{ は自然数})$$

$$\text{ここで } f'(0) = \left[\frac{d}{dx}f(x) \right]_{x=0}, \quad f''(0) = \left[\frac{d^2}{dx^2}f(x) \right]_{x=0}, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(0) = \left[\frac{d^n}{dx^n}f(x) \right]_{x=0}, \quad \cdots$$

[例] $f(x) = \sin x$ のとき、 $-\infty < x < +\infty$ において

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

偏微分の定義

三変数関数 $w = f(x, y, z)$ とするとき

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

[例] $w = x^3 + y^3 + z^3$ のとき

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^3 + y^3 + z^3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(x + \Delta x)^3 + y^3 + z^3] - (x^3 + y^3 + z^3)}{\Delta x} = 3x^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^3 + y^3 + z^3) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[x^3 + (y + \Delta y)^3 + z^3] - (x^3 + y^3 + z^3)}{\Delta y} = 3y^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (x^3 + y^3 + z^3) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{[x^3 + y^3 + (z + \Delta z)^3] - (x^3 + y^3 + z^3)}{\Delta z} = 3z^2$$

$$dw = 3x^2 dx + 3y^2 dy + 3z^2 dz$$

[例] $w = \sqrt{x + y + z}$ のとき

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x + y + z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x) + y + z} - \sqrt{x + y + z}}{\Delta x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x + y + z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + (y + \Delta y) + z} - \sqrt{x + y + z}}{\Delta y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{x + y + z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + y + (z + \Delta z)} - \sqrt{x + y + z}}{\Delta z} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

$$dw = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx + \frac{1}{2\sqrt{y}} dy + \frac{1}{2\sqrt{z}} dz$$

微分の一般公式

二つの関数を $f(x)$ ならびに $g(x)$ とするとき

$$\frac{d}{dx} [f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x) \quad \left[\text{ただし } f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) \text{ ならびに } g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) \right]$$

$$\frac{d}{dx} [f(x) g(x)] = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{[g(x)]^2}$$

[補遺] 補助的な基本公式

$a > 0, b > 0$ かつ x, y が実数のとき

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (\text{ただし } i = \sqrt{-1})$$

$$\log_e(xy) = \log_e x + \log_e y, \quad \log_e \left(\frac{x}{y} \right) = \log_e x - \log_e y \quad (\text{ただし } x > 0 \text{ かつ } y > 0)$$

$$\log_e x^r = r \log_e x \quad (\text{ただし } r \text{ は実数})$$

不定積分の定義（微分の逆演算）

導関数 $\frac{dy}{dx} = f(x)$ とするとき

$$y = \int f(x) dx + c = F(x) + c \quad (\text{ただし } c \text{ は積分定数}) \quad [\text{注}] \quad \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

[例] $f(x) = 3x^2$ のとき

$$y = \int 3x^2 dx + c = x^3 + c$$

様々な関数についての不定積分（以下では積分定数 c を略す。）

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (\text{ただし } n \text{ は実数 かつ } n \neq -1)$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log_e |x|$$

$$\int \sin x dx = -\cos x, \quad \int \cos x dx = \sin x, \quad \int \tan x dx = -\log_e |\cos x|$$

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int \log_e |x| dx = x \log_e |x| - x$$

置換積分法

$\int f(\phi(x)) dx$ とするとき、 $t = \phi(x)$ とおくと

$$f(\phi(x)) = f(t) \quad \text{かつ} \quad \frac{dt}{dx} = \phi'(x) \quad \text{すなわち} \quad dx = \frac{1}{\phi'(x)} dt \quad \text{なので}$$

$$\int f(\phi(x)) dx = \int f(t) \frac{1}{\phi'(x)} dt$$

[例] $f(x) = (2x+1)^9$ のとき

$$\int (2x+1)^9 dx \quad \text{において} \quad t = 2x+1 \quad \text{とおくと}$$

$$(2x+1)^9 = t^9 \quad \text{かつ} \quad \frac{dt}{dx} = (2x+1)' = 2 \quad \text{すなわち} \quad dx = \frac{1}{2} dt \quad \text{なので}$$

$$\int (2x+1)^9 dx = \int t^9 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{10} t^{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20} (2x+1)^{10}$$

部分積分法

二つの関数を $f(x)$ ならびに $g(x)$ とするとき

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx \quad \left[\text{ただし } g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} \quad \text{かつ} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \right]$$

$$[\text{注}] \quad g(x) = \int g'(x) dx$$

[例] $f(x) = 2x$ かつ $g'(x) = e^x$ のとき

$$\int 2x e^x dx = 2x \left(\int e^x dx \right) - \int (2x)' \left(\int e^x dx \right) dx = 2x e^x - \int 2e^x dx = 2x e^x - 2e^x = 2e^x (x-1)$$

[例] $f(x) = x$ かつ $g'(x) = \cos x$ のとき

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \left(\int \cos x dx \right) - \int (x)' \left(\int \cos x dx \right) dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) \\ &= x \sin x + \cos x \end{aligned}$$

定積分

不定積分 $\int f(x) dx = F(x)$ とするとき

$$\text{定積分 } \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (\text{ただし } a \text{ と } b \text{ は実数})$$

[例] $f(x) = 3x^2$ かつ $a = 2$ ならびに $b = 4$ のとき

$$\int_2^4 3x^2 dx = [x^3]_2^4 = 4^3 - 2^3 = 64 - 8 = 56$$

[例] $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ かつ $a = 1$ ならびに $b = 9$ のとき

$$\int_1^9 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = [\sqrt{x}]_1^9 = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2$$

[例] $f(x) = (2x+1)^9$ かつ $a = -\frac{1}{2}$ ならびに $b = 0$ のとき

$$t = 2x + 1 \text{ と置くと } t_a = 2a + 1 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0 \text{ ならびに } t_b = 2 \times 0 + 1 = 1$$

$$\text{また } (2x+1)^9 = t^9 \text{ かつ } \frac{dt}{dx} = (2x+1)' = 2 \text{ すなわち } dx = \frac{1}{2}dt$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 (2x+1)^9 dx = \int_{t_a}^{t_b} t^9 \frac{1}{2} dt = \int_0^1 t^9 \frac{1}{2} dt = \left[\frac{t^{10}}{10} \right]_0^1 \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{10} - \frac{0}{10} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$$

様々な関数についての定積分

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \quad (\text{ただし } n \text{ は実数 かつ } n \neq -1)$$

$$\int_a^b x^{-1} dx = \int_a^b \frac{1}{x} dx = \log_e |b| - \log_e |a|$$

$$\int_0^\pi \sin x dx = 2, \quad \int_0^\pi \cos x dx = 0, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \log_e \sqrt{2}$$

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\pi}$$

積分の一般公式

二つの関数を $f(x)$ ならびに $g(x)$ とし、定数係数を c とするとき

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

一階常微分方程式の解法（変数分離形）

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + c \quad (\text{ただし } c \text{ は積分定数})$$

[例]

$$\frac{dy}{dx} = ay \quad (\text{ただし } a \text{ は定数})$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = a \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{y} dy = a dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int a dx + c \quad (\text{ただし } c \text{ は積分定数})$$

$$\log_e y = ax + c$$

$$y = e^{ax+c} = Ce^{ax} \quad (\text{ただし } C = e^c)$$

[例]

$$\frac{dy}{dx} = axy \quad (\text{ただし } a \text{ は定数})$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = ax \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{y} dy = ax dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int ax dx + c \quad (\text{ただし } c \text{ は積分定数})$$

$$\log_e y = \frac{1}{2} ax^2 + c$$

$$y = e^{\frac{1}{2} ax^2 + c} = Ce^{\frac{1}{2} ax^2} \quad (\text{ただし } C = e^c)$$

二階常微分方程式の解法（定数係数）

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (\text{ただし } b \text{ と } c \text{ は定数})$$

$$y = e^{tx} \text{ と置いて左辺に代入} \quad (\text{ただし } t \text{ は未知数})$$

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{tx} + b \frac{d}{dx} e^{tx} + ce^{tx} = 0$$

$$t^2 e^{tx} + bte^{tx} + ce^{tx} = (t^2 + bt + c)e^{tx} = 0 \quad (\text{ただし } e^{tx} \neq 0)$$

$$t^2 + bt + c = 0 \quad : \quad \text{特性方程式}$$

$$\text{特性方程式の解} \quad t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$(i) \text{ 解 } t \text{ が二つの実数解 } \alpha \text{ と } \beta \text{ になるとき} \quad y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x} \quad (\text{ただし } c_1 \text{ と } c_2 \text{ は任意定数})$$

$$(ii) \text{ 解 } t \text{ が重解 } \gamma \text{ になるとき} \quad y = (c_1 + c_2 x) e^{\gamma x}$$

$$(iii) \text{ 解 } t \text{ が虚数解 } n \pm ki \text{ になるとき} \quad y = e^{nx} (c_1 \cos kx + c_2 \sin kx)$$

[例]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$y = e^{tx}$ と置いて左辺に代入

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{tx} - 3\frac{d}{dx}e^{tx} + 2e^{tx} = 0$$

$$t^2e^{tx} - 3te^{tx} + 2e^{tx} = (t^2 - 3t + 2)e^{tx} = 0 \quad (\text{ただし } e^{tx} \neq 0)$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} : \text{実数解} \quad \text{すなわち } t = \alpha = \frac{3+1}{2} = 2 \quad \text{かつ } t = \beta = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^x$$

[例]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

$y = e^{tx}$ と置いて左辺に代入

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{tx} - 6\frac{d}{dx}e^{tx} + 9e^{tx} = 0$$

$$t^2e^{tx} - 6te^{tx} + 9e^{tx} = (t^2 - 6t + 9)e^{tx} = 0 \quad (\text{ただし } e^{tx} \neq 0)$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = 3 : \text{重解} \quad \text{すなわち } t = \gamma = 3$$

$$y = (c_1 + c_2x)e^{3x}$$

[例]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 25y = 0$$

$y = e^{tx}$ と置いて左辺に代入

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{tx} - 8\frac{d}{dx}e^{tx} + 25e^{tx} = 0$$

$$t^2e^{tx} - 8te^{tx} + 25e^{tx} = (t^2 - 8t + 25)e^{tx} = 0 \quad (\text{ただし } e^{tx} \neq 0)$$

$$t^2 - 8t + 25 = 0$$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{64-100}}{2} = 4 \pm 3i = n \pm ki : \text{虚数解} \quad \text{すなわち } n = 4 \quad \text{かつ } k = 3$$

$$y = e^{4x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$$

ベクトルの幾何学的表示

ベクトル $\mathbf{A}$: 有向線分で表示 (矢印)

ベクトル $\mathbf{A}$ の大きさ $|\mathbf{A}| = A$: 有向線分の長さ (矢印の長さ)

負のベクトル $-\mathbf{A}$: 逆向き有向線分で表示 (逆向きの矢印)

ベクトルの和 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$: $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を二辺とする平行四辺形の対角線を長さとする有向線分

ベクトルの内積 : $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$ (ただし θ は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ のなす角)

ベクトルの外積の大きさ : $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta$

すなわち外積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ は、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を二辺とする平行四辺形の面積 $AB \sin \theta$ を長さとするベクトルであって、方向は平行四辺形の面に垂直かつ $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ へ廻した際に右ねじの進む向きと決める。

ベクトルの直交座標表示

ベクトル $\mathbf{A}$ の直交座標軸 x, y, z 方向のそれぞれの成分を A_x, A_y, A_z とすると

$$\mathbf{A} = iA_x + jA_y + kA_z$$

ただし i, j, k はそれぞれ x, y, z 各座標軸の基本ベクトルである。

基本ベクトル i, j, k は、大きさ 1 のベクトルであって、直交座標系においては互いに直交する。

すなわち i, j, k の大きさ $|i| = |j| = |k| = 1$

$$\text{ベクトル } \mathbf{A} \text{ の大きさ } |\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

基本ベクトルの演算規則

内積

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

[注] ドット記号「 $\cdot$ 」は内積を表す。

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$

$$j \cdot i = k \cdot j = i \cdot k = 0$$

外積

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

[注] 積記号「 $\times$ 」は外積を表す。

$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j$$

$$j \times i = -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j$$

ベクトルの内積と外積

二つのベクトルを $\mathbf{A}$ ならびに $\mathbf{B}$ とするとき、次のような内積と外積が定義される。

内積

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (iA_x + jA_y + kA_z) \cdot (iB_x + jB_y + kB_z) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad \text{[注] ベクトルの内積は交換法則が成り立つ。}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

外積

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (iA_x + jA_y + kA_z) \times (iB_x + jB_y + kB_z)$$

$$= i(A_y B_z - A_z B_y) + j(A_z B_x - A_x B_z) + k(A_x B_y - A_y B_x)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad \text{[注] ベクトルの外積は交換法則が成り立たない。}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{B} = 0 \quad \text{[注] 同一のベクトルの外積は零となる。}$$

ベクトルの微分

ベクトル $\mathbf{A}$ や $\mathbf{B}$ がスカラーの変数 t の関数になっているとき、すなわち $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ ならびに $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ のとき

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dA_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dA_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dA_z}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

ベクトルの積分

ベクトル $\mathbf{A}$ や $\mathbf{B}$ がスカラーの変数 t の関数になっているとき、すなわち $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ ならびに $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ のとき

$$\int \mathbf{A} dt = \mathbf{i} \int A_x dt + \mathbf{j} \int A_y dt + \mathbf{k} \int A_z dt$$

$$\int (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) dt = \mathbf{i} \int (A_x \pm B_x) dt + \mathbf{j} \int (A_y \pm B_y) dt + \mathbf{k} \int (A_z \pm B_z) dt$$

ベクトルの応用例

位置ベクトル $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$

変位ベクトル $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$

速度 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z = \mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz}{dt}$ (ただし t は時間)

運動量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{i}p_x + \mathbf{j}p_y + \mathbf{k}p_z = \mathbf{i}mv_x + \mathbf{j}mv_y + \mathbf{k}mv_z$ (ただし m は質量)

加速度 $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z = \mathbf{i} \frac{dv_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dv_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dv_z}{dt} = \mathbf{i} \frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j} \frac{d^2y}{dt^2} + \mathbf{k} \frac{d^2z}{dt^2}$

力 $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z = \mathbf{i}ma_x + \mathbf{j}ma_y + \mathbf{k}ma_z$

仕事 $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

運動エネルギー $K = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$

力のモーメント $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{i}(yF_z - zF_y) + \mathbf{j}(zF_x - xF_z) + \mathbf{k}(xF_y - yF_x)$

角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{i}(yp_z - zp_y) + \mathbf{j}(zp_x - xp_z) + \mathbf{k}(xp_y - yp_x)$

ベクトル場

ベクトル $\mathbf{A}$ が空間座標 x, y, z の関数になっているとき、すなわち $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ のときベクトル場と呼ばれる。

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{i}A_x(x, y, z) + \mathbf{j}A_y(x, y, z) + \mathbf{k}A_z(x, y, z)$$

ただし $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ x, y, z 各座標軸の基本ベクトルである。

[注] スカラー ϕ が空間座標 x, y, z の関数になっているとき、すなわち $\phi = \phi(x, y, z)$ のときはスカラー場と呼ばれる。

勾配

スカラー場 $\phi = \phi(x, y, z)$ とするとき、各点における勾配を表すベクトル $\text{grad } \phi$ が次式のように定義される。

$$\text{grad } \phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{grad の呼称 : グラジエント})$$

$$\text{ベクトル微分演算子 } \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{とすると} \quad \text{grad } \phi = \nabla \phi \quad (\nabla \text{ の呼称 : ナブラ})$$

発散

ベクトル場 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ とするとき、発散を表すスカラー $\text{div } \mathbf{A}$ が次式のように定義される。

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{div の呼称 : ダイバージェンス})$$

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{を用いると} \quad \text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

回転

ベクトル場 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ とするとき、回転を表すベクトル $\text{rot } \mathbf{A}$ が次式のように定義される。

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (\text{rot の呼称 : ローテーション})$$

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{を用いると} \quad \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

勾配の発散

スカラー場 $\phi = \phi(x, y, z)$ とするとき、各点における勾配の発散を表すスカラー $\text{div grad } \phi$ は次式のように記せる。

$$\text{div grad } \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{を用いると} \quad \text{div grad } \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$$

[注] ナブラの二乗 ∇^2 を Δ で記すこともある。（ Δ の呼称はラプラシアン）

回転の回転

ベクトル場 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ とするとき、回転の回転を表すベクトル $\text{rot rot } \mathbf{A}$ は次式のように記せる。

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\text{div grad } \mathbf{A} + \text{grad div } \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \text{grad div } \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A})$$

勾配の回転

スカラー場 $\phi = \phi(x, y, z)$ とするとき、勾配の回転を表すベクトル $\text{rot grad } \phi$ は常に零ベクトル $\mathbf{0}$ となる。

$$\text{rot grad } \phi = \nabla \times \nabla \phi = \mathbf{0} \quad (\text{ただし } \mathbf{0} = \mathbf{i}0 + \mathbf{j}0 + \mathbf{k}0)$$

回転の発散

ベクトル場 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ とするとき、回転の発散を表すスカラー $\text{div rot } \mathbf{A}$ は常に零となる。

$$\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

公式

$$\text{div}(\phi \mathbf{A}) = (\text{grad } \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi (\text{div } \mathbf{A})$$

$$\text{rot}(\phi \mathbf{A}) = (\text{grad } \phi) \times \mathbf{A} + \phi (\text{rot } \mathbf{A})$$

ベクトル場の応用例

重力のポテンシャルエネルギー $U = U(x, y, z)$ とするとき、重力場 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ は

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U$$

電荷密度 $\rho = \rho(x, y, z, t)$ とし、電流密度 $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x, y, z)$ とするとき、電荷の保存法則は

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{ただし } t \text{ は時間})$$

電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ とし、電荷密度 $\rho = \rho(x, y, z)$ とするとき、ガウスの法則は

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (\text{ただし } \pi \text{ は円周率})$$

電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$ とし、磁束密度 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z, t)$ とするとき、ファラデーの法則は

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (\text{ただし } t \text{ は時間})$$

行列 matrix

$m \times n$ 個の数 a_{ij} (ただし $i = 1, 2, \dots, m$ かつ $j = 1, 2, \dots, n$) の全体を A で表し、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のように a_{ij} を配列したものを、 m 行 n 列の行列 あるいは (m, n) 行列という。

ここで 数 a_{ij} を行列 A の成分といい、横に並んだ数を行、縦に並んだ数を列という。

[例] 3 行 4 列の行列 あるいは $(3, 4)$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

正方行列

行数と列数が等しい行列、すなわち (n, n) 行列を n 次の正方行列という。

[例] $(3, 3)$ 行列すなわち 3 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

正方行列 A において、左上から右下に至る対角線上の成分を A の対角成分という。

行ベクトルならびに列ベクトル

一つの行だけからなる行列、すなわち $(1, n)$ 行列を n 次の行ベクトルという。

[例] $(1, 3)$ 行列すなわち 3 次の行ベクトル

$$(a_1 \ a_2 \ a_3)$$

一つの列だけからなる行列、すなわち $(m, 1)$ 行列を m 次の列ベクトルという。

[例] $(3, 1)$ 行列すなわち 3 次の列ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

一行一列だけからなる行列 すなわち $(1, 1)$ 行列はスカラーに帰着する。スカラーは単なる数である。

行列の相等

行列 A と行列 B がともに同じ (m, n) 行列で、しかも それらの (i, j) 成分 a_{ij} と b_{ij} がすべて互いに等しいとき、 A と B は等しい。すなわち $A = B$ は $a_{ij} = b_{ij}$ となることである。

行列の加法

行列 A と行列 B がともに同じ (m, n) 行列のときに定義され、 $a_{ij} + b_{ij}$ を成分とする (m, n) 行列を A と B の和といい、 $A + B$ で表す。

[例] $(2, 2)$ 行列の和

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

スカラーと (3, 3) 行列の積

$$s \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} \\ sa_{31} & sa_{32} & sa_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ただし } s \text{ はスカラー}$$

3 次の行ベクトルと 3 次の列ベクトルの積

$$(a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

すなわち 3 次の行ベクトルと 3 次の列ベクトルの積はスカラーとなる。

3 次の行ベクトルと (3, 3) 行列の積

$$(a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = (a_1 b_{11} + a_2 b_{21} + a_3 b_{31} \quad a_1 b_{12} + a_2 b_{22} + a_3 b_{32} \quad a_1 b_{13} + a_2 b_{23} + a_3 b_{33})$$

すなわち 3 次の行ベクトルと (3, 3) 行列の積は 3 次の行ベクトルとなる。

(3, 3) 行列と 3 次の列ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 \\ a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3 \end{pmatrix}$$

すなわち (3, 3) 行列と 3 次の列ベクトルの積は 3 次の列ベクトルとなる。

(3, 3) 行列と (3, 3) 行列の積

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

すなわち (3, 3) 行列と 3 次の (3, 3) 行列の積は (3, 3) 行列となる。

[注] 一般に行列の積については交換法則が成り立つとは限らない。

転置行列

行列 A において、行と列を入れ換えた行列のことを、 A の転置行列といい、 ${}^t A$ と記す。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad {}^t A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

[注] 列ベクトルの転置行列は行ベクトルとなり、行ベクトルの転置行列は列ベクトルとなる。

対称行列

$A = {}^t A$ が成り立つような行列 A のことを対称行列という。

[例] (2, 2) 対称行列ならびに (3, 3) 対称行列

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

対角行列

対角成分以外の要素が、すべて零であるような行列のことを対角行列をいう。

[例] (2, 2) 対角行列ならびに (3, 3) 対角行列

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

[注] 対角行列の積については、交換法則が成り立つ。

行列式 determinant

n 次の正方行列 A について、その $n \times n$ 個の数 a_{ij} (ただし $i = 1, 2, \dots, n$ かつ $j = 1, 2, \dots, n$) とするとき、次のように n 次の行列式 $|A|$ が定義される。

1 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}$$

2 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

4 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \\ = a_{11} (a_{22}a_{33}a_{44} + a_{32}a_{43}a_{24} + a_{23}a_{34}a_{42} - a_{24}a_{33}a_{42} - a_{23}a_{32}a_{44} - a_{34}a_{43}a_{22}) \\ - a_{12} (a_{21}a_{33}a_{44} + a_{31}a_{43}a_{24} + a_{23}a_{34}a_{41} - a_{24}a_{33}a_{41} - a_{23}a_{31}a_{44} - a_{34}a_{43}a_{21}) \\ + a_{13} (a_{21}a_{32}a_{44} + a_{31}a_{42}a_{24} + a_{22}a_{34}a_{41} - a_{24}a_{32}a_{41} - a_{22}a_{31}a_{44} - a_{34}a_{42}a_{21}) \\ - a_{14} (a_{21}a_{32}a_{43} + a_{31}a_{42}a_{23} + a_{22}a_{33}a_{41} - a_{23}a_{32}a_{41} - a_{22}a_{31}a_{43} - a_{33}a_{42}a_{21}) \\ = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{32}a_{43}a_{24} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{34}a_{43}a_{22} \\ - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{31}a_{43}a_{24} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{34}a_{43}a_{21} \\ + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{31}a_{42}a_{24} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{34}a_{42}a_{21} \\ - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{31}a_{42}a_{23} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + a_{14}a_{33}a_{42}a_{21}$$

[例] 3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 1 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 2 \times 4 \times 8 + 6 \times 0 \times 3 + 7 \times 5 \times 1 - 3 \times 4 \times 7 - 1 \times 0 \times 2 - 8 \times 6 \times 5 = -225$$

行列式の一般的定義

n 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3i} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して、その n^2 個の成分 a_{ij} から作られる

$$\sum_{i,j,\dots,k=1}^n \epsilon_{ij\dots k} a_{1i} a_{2j} \cdots a_{nk}$$

なる式を n 次の行列式 $|A|$ という。(ただし $\epsilon_{ij\dots k}$ の添え字の番号 $i, j, \dots, k$ の個数は n)

ここで

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij\dots k} &= 1, & (i, j, \dots, k \text{ が偶順列のとき}) \\ \epsilon_{ij\dots k} &= -1, & (i, j, \dots, k \text{ が奇順列のとき}) \\ \epsilon_{ij\dots k} &= 0, & (i, j, \dots, k \text{ の中に同じ数があるとき}) \end{aligned}$$

例えば

$$\begin{aligned} \text{2 次のとき} \quad & \epsilon_{12} = 1, \quad \epsilon_{21} = -1, \quad \epsilon_{11} = 0, \quad \epsilon_{22} = 0 \\ \text{3 次のとき} \quad & \epsilon_{123} = 1, \quad \epsilon_{321} = -1, \quad \epsilon_{231} = 1, \quad \epsilon_{111} = 0, \\ & \epsilon_{112} = 0, \quad \epsilon_{122} = 0, \quad \epsilon_{222} = 0, \quad \cdots \end{aligned}$$

一般に n 次の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3i} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

のように記す。

[例] 2 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{i,j=1}^2 \epsilon_{ij} a_{1i} a_{2j} = \epsilon_{12} a_{11} a_{22} + \epsilon_{21} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

[例] 3 次の行列式

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \\ &= \epsilon_{123} a_{11} a_{22} a_{33} + \epsilon_{132} a_{11} a_{23} a_{32} + \epsilon_{213} a_{12} a_{21} a_{33} \\ &\quad + \epsilon_{231} a_{12} a_{23} a_{31} + \epsilon_{312} a_{13} a_{21} a_{32} + \epsilon_{321} a_{13} a_{22} a_{31} \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} \\ &\quad + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$