

論理

1 命題と真理値

命題 proposition

真偽がいずれか一方に決定される言明のこと。

[例]

- 「ネコは哺乳類に属する動物である。」 : 真なる命題
- 「コウモリは鳥類に属する動物である。」 : 偽なる命題
- 「 $3 + 2 = 5$ 」 : 真なる命題
- 「 $3 \div 2$ は有理数である。」 : 真なる命題
- 「 $\sqrt{2}$ は有理数である。」 : 偽なる命題

真理値 truth value

命題 P が真のとき 値 T(true) をもち、偽のときは 値 F(false) をもつと定義する。

論理記号 logical symbol

与えられたいくつかの命題から、新しい命題を構成するために用いられる記号のこと。

- $\vee$: または (or)
- $\wedge$: かつ (and)
- $'$: ということはない (not)
- $\rightarrow$: ならば (if ~ then)
- $\leftrightarrow$: のときかつそのときに限り (if and only if)

選言 disjunction

二つの命題 P と Q を記号 $\vee$ で結びつけた命題 $P \vee Q$ のこと。 : 「 P または Q 」

[例]

- P : $\sqrt{2}$ は無理数である.
- Q : $\sqrt{2}$ は整数である.
- $P \vee Q$: $\sqrt{2}$ は無理数であるか または $\sqrt{2}$ は整数である.

命題 $P \vee Q$ の真偽の定義を右表に示す。

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

[注] 上記のような表を「真理表 (truth table)」と言う。

選言についての法則

- $P \vee P = P$: 累同の法則
- $P \vee Q = Q \vee P$: 交換法則
- $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$: 結合法則

連言 conjunction

二つの命題 P と Q を記号 $\wedge$ で結びつけた命題 $P \wedge Q$ のこと。 : 「 P かつ Q 」

[例]

- P : $\sqrt{2}$ は無理数である.
- Q : $\sqrt{2}$ は整数である.
- $P \wedge Q$: $\sqrt{2}$ は無理数であり かつ $\sqrt{2}$ は整数である.

命題 $P \wedge Q$ の真偽の定義を右表に示す。

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

連言についての法則

$P \wedge P = P$: 累同の法則

$P \wedge Q = Q \wedge P$: 交換法則

$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$: 結合法則

連言と選言を含む命題

任意の命題 P, Q, R に対して次の分配法則が成り立つ。

$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

否定 negation

命題 P に記号 $'$ をつけた命題 P' のこと。 : 「 P ということはない。」

[例]

P : $\sqrt{2}$ は無理数である。

P' : $\sqrt{2}$ は無理数であるということはない。

[注] 「 $\sqrt{2}$ は無理数ではない。」としては誤りである。

P	P'
T	F
F	T

命題 P' の真偽の定義を右表に示す。

否定についての法則

命題 P の否定 P' の否定 P'' とすると次式が成り立つ。

$P'' = P$: 二重否定の法則

[注] 否定の表わし方には記号 $'$ の他に $\neg$, not, $\sim$ などが用いられる。 ($\bar{P}$, notP, $\sim P$)

条件命題 conditional

二つの命題 P と Q を記号 $\rightarrow$ で結びつけた命題 $P \rightarrow Q$ のこと。 : 「 P ならば Q 」

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

命題 $P \rightarrow Q$ の真偽の定義を右表に示す。

双条件命題 biconditional

二つの命題 P と Q を記号 $\leftrightarrow$ で結びつけた命題 $P \leftrightarrow Q$ のこと。 : 「 P のとき かつ そのときに限り Q 」

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

命題 $P \leftrightarrow Q$ の真偽の定義を右表に示す。

de Morgan(ド・モルガン) の法則

$$(P \vee Q)' = P' \wedge Q'$$

$$(P \wedge Q)' = P' \vee Q'$$

[証明]

真理表を作って $(P \vee Q)' = P' \wedge Q'$ を示す。

(真理表の作成方法)

(1) 各命題 P, Q ならびに証明する式の左辺と右辺を最上の欄に記入する。

P	Q	$(P \vee Q)'$	$P' \wedge Q'$

(2) 最初に命題 P, Q の真理値を記入する。

P	Q	$(P \vee Q)'$	$P' \wedge Q'$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

(3) 左辺中の括弧内の論理式 $P \vee Q$ の真理値を先に記入する。

P	Q	$(P \vee Q)'$	$P' \wedge Q'$
T	T	T	
T	F	T	
F	T	T	
F	F	F	

(4) 左辺の論理式 $(P \vee Q)'$ の真理値を [] 中に得る。

P	Q	$(P \vee Q)'$	$P' \wedge Q'$
T	T	T [F]	
T	F	T [F]	
F	T	T [F]	
F	F	F [T]	

(5) 右辺については P', Q' のそれぞれの真理値を先に記入する。

P	Q	$(P \vee Q)'$	$P' \wedge Q'$
T	T	T [F]	F F
T	F	T [F]	F T
F	T	T [F]	T F
F	F	F [T]	T T

(6) 右辺の論理式 $P' \wedge Q'$ の真理値を [] 中に得ると真理表が完成する。

P	Q	$(P \vee Q)'$	$P' \wedge Q'$
T	T	T [F]	F [F] F
T	F	T [F]	F [F] T
F	T	T [F]	T [F] F
F	F	F [T]	T [T] T

この完成した表 (6) において、左辺と右辺の真理値すなわち [] 中の値が各行で等しいので

$$(P \vee Q)' = P' \wedge Q'$$

が証明される。

[注] $(P \wedge Q)' = P' \vee Q'$ についても同様の方法で証明出来る。

[注] $P \rightarrow Q = P' \vee Q$ が成り立つことを真理表によって示せる。

[注] $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ が成り立つことを真理表によって示せる。

【例題 1】 任意の命題 P, Q, R に対して次の関係が成立することを真理表を作って示せ。

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

〔証明〕

(1) 各命題 P, Q, R ならびに証明する式の左辺と右辺を最上の欄に記入する。

P	Q	R	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(2) 最初に命題 P, Q, R の真理値を記入する。

P	Q	R	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

(3) 左辺中の括弧内の論理式 $Q \vee R$ の真理値を先に記入する。

P	Q	R	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T	T	
T	T	F	T	
T	F	T	T	
T	F	F	F	
F	T	T	T	
F	T	F	T	
F	F	T	T	
F	F	F	F	

(4) 左辺の論理式 $P \wedge (Q \vee R)$ の真理値を [] 中に得る。

P	Q	R	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T	[T] T	
T	T	F	[T] T	
T	F	T	[T] T	
T	F	F	[F] F	
F	T	T	[F] T	
F	T	F	[F] T	
F	F	T	[F] T	
F	F	F	[F] F	

(5) 右辺については $(P \wedge Q)$, $(P \wedge R)$ のそれぞれの真理値を先に記入する。

P	Q	R	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T	[T] T	T T
T	T	F	[T] T	T F
T	F	T	[T] T	F T
T	F	F	[F] F	F F
F	T	T	[F] T	F F
F	T	F	[F] T	F F
F	F	T	[F] T	F F
F	F	F	[F] F	F F

(6) 右辺の論理式 $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ の真理値を [] 中に得ると真理表が完成する。

P	Q	R	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T	[T] T	T [T] T
T	T	F	[T] T	T [T] F
T	F	T	[T] T	F [T] T
T	F	F	[F] F	F [F] F
F	T	T	[F] T	F [F] F
F	T	F	[F] T	F [F] F
F	F	T	[F] T	F [F] F
F	F	F	[F] F	F [F] F

この完成した表 (6) において、左辺と右辺の真理値すなわち [] 中の値が各行で等しいので

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

が証明される。

恒真命題 tautology

論理式に含まれる各命題 $P, Q, \dots$ の真偽にかかわらず、常に真なる値をとる論理式のことをいい、記号 I で表わす。

恒偽命題

論理式に含まれる各命題 $P, Q, \dots$ の真偽にかかわらず、常に偽なる値をとる論理式のことをいい、記号 O で表わす。

【例題 2】 次の論理式 A や B は恒真命題であることを真理表を作って示せ。

(a) $A = (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$

(b) $B = P' \rightarrow (P \rightarrow Q)$

(a) について証明

(1) 各命題 P, Q ならびに論理式を最上の欄に記入する。

P	Q	$A = (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$

(2) 最初に命題 P, Q の真理値を記入する。

P	Q	$A = (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

(3) 論理式の中で括弧内の式 $(P \vee Q)$, $(Q \vee P)$ の真理値をそれぞれ先に記入する。

P	Q	$A = (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$	
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

(4) 論理式 $A = (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$ の値を [] 中に得ると表が完成する。

P	Q	$A = (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$		
T	T	T	[T]	T
T	F	T	[T]	T
F	T	T	[T]	T
F	F	F	[T]	F

この完成した表 (4) より、命題 P, Q の真偽にかかわらず論理式

$$A = (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$$

は常に真なる値 [T] をもつので恒真命題である。

(b) についても同様の方法で恒真命題であることが示せる。

P	Q	$B = P' \rightarrow (P \rightarrow Q)$		
T	T	F	[T]	T
T	F	F	[T]	F
F	T	T	[T]	T
F	F	T	[T]	T

この表より、命題 P, Q の真偽にかかわらず論理式

$$B = P' \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

は常に真なる値 [T] をもつので恒真命題である。

排中法則

任意の命題 P に対して $P \vee P' = I$ が成立する。

[例]

P : $\sqrt{2}$ は無理数である。

P' : $\sqrt{2}$ は無理数であるということはない。

$P \vee P'$: $\sqrt{2}$ は無理数であるか または $\sqrt{2}$ は無理数であるということはない。

矛盾法則

任意の命題 P に対して $P \wedge P' = O$ が成立する。

[例]

P : $\sqrt{2}$ は無理数である。

P' : $\sqrt{2}$ は無理数であるということはない。

$P \wedge P'$: $\sqrt{2}$ は無理数であり かつ $\sqrt{2}$ は無理数であるということはない。

同値

二つの論理式

$$A = f(P, Q, \dots)$$

$$B = g(P, Q, \dots)$$

において、 A と B の真偽が一致するとき

$$A = B$$

と記し、 A と B は同値であるという。

逆・裏・対偶

条件命題 $P \rightarrow Q$ に対して

逆 : $Q \rightarrow P$

裏 : $P' \rightarrow Q'$

対偶 : $Q' \rightarrow P'$

などを定義する。

ここで

$$P \rightarrow Q = Q' \rightarrow P'$$

$$Q \rightarrow P = P' \rightarrow Q'$$

が成立する。

すなわち 元の命題とその対偶は同値である。また逆と裏も同値である。

2 推論

推論 argument

二つの論理式

$$A = f(P, Q, \dots, R)$$

$$B = g(P, Q, \dots, R)$$

とするとき、 A が真 [T] であるような命題 $P, Q, \dots, R$ の真理値に対して常に B が真 [T] となる場合、 A から B が推論（演繹）されるといい

$$A \Rightarrow B$$

で表わす。

このとき A を前提（仮定）、 B を結論という。

必要条件・十分条件

$A \Rightarrow B$ であるとき、

「 B は A であるための必要条件」、

「 A は B であるための十分条件」

という。

【例題 3】 論理式 $A = P \wedge (P \rightarrow Q)$ ならびに $B = P \vee Q$ とするとき、 $A \Rightarrow B$ を真理表を作って証明せよ。

[証明]

- (1) 各命題 P, Q ならびに二つの論理式 A, B を最上の欄に記入する。

P	Q	$A = P \wedge (P \rightarrow Q)$	$B = P \vee Q$

- (2) 最初に命題 P, Q の値を記入する。

P	Q	$A = P \wedge (P \rightarrow Q)$	$B = P \vee Q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

(3) 論理式 $A = P \wedge (P \rightarrow Q)$ の中で括弧内の式 $P \rightarrow Q$ の値を先に記入する。

P	Q	$A = P \wedge (P \rightarrow Q)$	$B = P \vee Q$
T	T	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	F	T	

(4) 論理式 $A = P \wedge (P \rightarrow Q)$ の値を [] 中に得る。

P	Q	$A = P \wedge (P \rightarrow Q)$	$B = P \vee Q$
T	T	[T] T	
T	F	[F] F	
F	T	[F] T	
F	F	[F] T	

(5) 次に論理式 $B = P \vee Q$ の値を [] 中に得ると真理表が完成する。

P	Q	$A = P \wedge (P \rightarrow Q)$	$B = P \vee Q$
T	T	[T] T	[T]
T	F	[F] F	[T]
F	T	[F] T	[T]
F	F	[F] T	[F]

この完成した表 (5) より、 A が真 [T] であるとき B が真 [T] となっているので、 A から B が推論される。

よって $A \Rightarrow B$

[注] 論理式 A の値が偽 [F] のときは除外する。

[注] A の値が真 [T] であっても、 B が偽 [F] のときが一つでもある場合は、 A から B が推論されるとは言わない。

推論方式

一般に前提がいくつかの命題 $P_1, P_2, \dots, P_n$ の連言からなっていて、それから結論 Q が推論されるときは

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow Q$$

と表わせる。

主な推論方式には次のものがある。

- (1) 簡約の法則 : $P \wedge Q \Rightarrow P$
- (2) 付加の法則 : $P \Rightarrow P \vee Q$
- (3) 三段論法肯定式 : $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$
- (4) 三段論法否定式 : $Q' \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow P'$
- (5) 仮言三段論法 : $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$
- (6) 選言的三段論法 : $(P \vee Q) \wedge P' \Rightarrow Q$

[例題 4] $Q' \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow P'$ を真理表を作って証明せよ。

[証明]

(1) 各命題 P, Q と二つの論理式 $Q' \wedge (P \rightarrow Q)$ ならびに P' を最上の欄に記入する。

P	Q	$Q' \wedge (P \rightarrow Q)$	P'

(2) 最初に命題 P, Q の値を記入する。

P	Q	$Q' \wedge (P \rightarrow Q)$	P'
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

(3) 論理式 $Q' \wedge (P \rightarrow Q)$ の中で、 Q' ならびに括弧内の式 $P \rightarrow Q$ の値を先に記入する。

P	Q	Q'	$P \rightarrow Q$	$Q' \wedge (P \rightarrow Q)$	P'
T	T	F	T		
T	F	T	F		
F	T	F	T		
F	F	T	T		

(4) 論理式 $Q' \wedge (P \rightarrow Q)$ の値を [] 中に得る。

P	Q	Q'	$P \rightarrow Q$	$Q' \wedge (P \rightarrow Q)$	P'
T	T	F	[F]	T	
T	F	T	[F]	F	
F	T	F	[F]	T	
F	F	T	[T]	T	

(5) 次に論理式 P' の値を [] 中に得ると真理表が完成する。

P	Q	Q'	$P \rightarrow Q$	$Q' \wedge (P \rightarrow Q)$	P'
T	T	F	[F]	T	[F]
T	F	T	[F]	F	[F]
F	T	F	[F]	T	[T]
F	F	T	[T]	T	[T]

この完成した表 (5) より、 $Q' \wedge (P \rightarrow Q)$ が真 [T] であるとき P' が真 [T] となっているので、
よって $Q' \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow P'$

[注] 論理式 $Q' \wedge (P \rightarrow Q)$ の値が偽 [F] のときは除外する。

[例題 5] $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$ を真理表を作って証明せよ。

[証明]

(1) 各命題 P, Q, R ならびに二つの論理式を最上の欄に記入する。

P	Q	R	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$	$P \rightarrow R$

(2) 最初に命題 P, Q, R の値を記入する。

P	Q	R	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$	$P \rightarrow R$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

(3) 論理式 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ の中で括弧内の式 $P \rightarrow Q$ ならびに $Q \rightarrow R$ の値を先にそれぞれ記入する。

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$(Q \rightarrow R)$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$	$P \rightarrow R$
T	T	T	T	T	T	
T	T	F	T	F	F	
T	F	T	F	T	F	
T	F	F	F	T	F	
F	T	T	T	T	T	
F	T	F	T	F	F	
F	F	T	T	T	T	
F	F	F	T	T	T	

(4) 論理式 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ の値を [] 中に得る。

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$(Q \rightarrow R)$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$	$P \rightarrow R$
T	T	T	T	[T]	T	
T	T	F	T	[F]	F	
T	F	T	F	[F]	F	
T	F	F	F	[F]	F	
F	T	T	T	[T]	T	
F	T	F	T	[F]	F	
F	F	T	T	[T]	T	
F	F	F	T	[T]	T	

(5) 次に論理式 $P \rightarrow R$ の値を [] 中に得ると真理表が完成する。

P	Q	R	$(P \rightarrow Q)$	$(Q \rightarrow R)$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$	$P \rightarrow R$
T	T	T	T	[T]	T	[T]
T	T	F	T	[F]	F	[F]
T	F	T	F	[F]	F	[T]
T	F	F	F	[F]	F	[F]
F	T	T	T	[T]	T	[T]
F	T	F	T	[F]	F	[T]
F	F	T	T	[T]	T	[T]
F	F	F	T	[T]	T	[T]

この完成した表 (5) より、 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ が真 [T] であるとき $P \rightarrow R$ が必ず真 [T] となっている。

よって $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$

[注] 論理式 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ の値が偽 [F] のときは除外する。

3 命題関数

命題関数

一般に命題 P は主部と述部よりなるが、その主部を変数 x とみなし、述部を関数 $P()$ とみなしたものをいう。

[例]

「 x は 偶数である。」 : $P(x)$

↑ ↑
変数 x 関数 $P()$

命題関数 $P(x)$ それ自体は真偽がどちらとも わからないから命題とは言えないが、変数 x に値を代入すると命題となる。

[例]

$P(x)$: 「 x は偶数である。」 真偽が確定しない。すなわち命題関数である。

$P(3)$: 「3 は偶数である。」 という命題。 (偽)

$P(8)$: 「8 は偶数である。」 という命題。 (真)

限定記号

全称記号 $\forall$ や存在記号 $\exists$ のことをいう。

$\forall$: すべての (all)

$\exists$: 存在する (exist)

限定命題

全称記号 $\forall$: 「すべての」 を意味する記号

存在記号 $\exists$: 「存在する」 を意味する記号

命題関数 $P(x)$ に対して、全称記号 $\forall$ や存在記号 $\exists$ を付すことにより得られる命題のことを限定命題という。

命題関数 $P(x)$ は、 x が定められていないと命題とはならないが、 $\forall x P(x)$ や $\exists x P(x)$ は真偽が確定するので命題となる。

$\forall x P(x)$: 「すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ。」 という命題

$\exists x P(x)$: 「 $P(x)$ が成り立つような x が存在する。」 という命題

[注] $\forall x P(x)$ を全称命題、 $\exists x P(x)$ を存在命題という。

[例]

$P(x)$: 「 x は整数である。」 (真偽が確定しない。すなわち命題関数である。)

$\forall x P(x)$: 「すべての x は整数である。」 (偽なる命題となる。)

$\exists x P(x)$: 「整数であるような x が存在する。」 (真なる命題となる。)

二つの命題関数 $P(x)$ と $M(x)$ が与えられたとき、次のような限定命題が考えられる。

$$\forall x [M(x) \rightarrow P(x)]$$

$$\exists x [M(x) \wedge P(x)]$$

[例]

$M(x)$: 「 x は自然数である。」

$P(x)$: 「 x は数である。」

とすると

$\forall x [M(x) \rightarrow P(x)]$: 「すべての x について、 x が自然数である ならば x は数である。」

換言すれば 「すべての x は数である。」

$\exists x [M(x) \wedge P(x)]$: 「 x は自然数であり かつ x は数である ような x が存在する。」

換言すれば 「数 x が存在する。」

[例題 6] 次の数学的命題を限定記号を用いて表わせ。

(1) すべての x について $x > 3$ ならば $x^2 > 9$ である。

(2) 方程式 $x^3 + 1 = 0$ を満たし、かつ そのような実数 x が存在する。

(解)

(1) $\forall x [(x > 3) \rightarrow (x^2 > 9)]$

(2) $\exists x [(x \in \mathbf{R}) \wedge (x^3 + 1 = 0)]$

[注] $x \in \mathbf{R}$ は「 x は実数」を意味する。

単称命題

命題関数 $P(x)$ において、 x の特定の要素 a についての命題 $P(a)$ のことをいう。

[例]

$P(x)$: 「 x は実数である。」

a : 3.58

$P(a)$: 「3.58 は実数である。」

限定命題の否定

全称命題の否定 : $[\forall x P(x)]' = \exists x P'(x)$

存在命題の否定 : $[\exists x P(x)]' = \forall x P'(x)$

$\forall x P(x)$ は「すべての x について」 $P(x)$ が成立することを主張するので、これを否定するためには $P(x)$ が成立しない例が一つでも存在することを主張する命題すなわち $\exists x P'(x)$ となる。

$\exists x P(x)$ は「 $P(x)$ が成立するような x が少なくとも一つは存在する」ことを主張するので、これを否定するためにはすべての x について $P(x)$ が成立しないことを主張する命題すなわち $\forall x P'(x)$ となる。

[例題 7] 全称命題「すべての x は整数である。」の否定を作れ。

(解)

「すべての x は整数であるということはない。」

換言すれば「整数ではないような x が少なくとも一つは存在する。」

[注] 上記の例で否定を作るとき「すべての x は整数ではない。」としては誤りである。

二つの命題関数を含む限定命題の否定

全称命題の否定 : $\{\forall x [M(x) \rightarrow P(x)]\}' = \exists x [M(x) \wedge P'(x)]$

存在命題の否定 : $\{\exists x [M(x) \wedge P(x)]\}' = \forall x [M(x) \rightarrow P'(x)]$

[例題 8] 次の論理式で与えられるような限定命題の否定の否定は元の限定命題となることを証明せよ。

(1) $\{\forall x [M(x) \rightarrow P(x)]\}''$

(2) $\{\exists x [M(x) \wedge P(x)]\}''$

(解)

(1) $\{\forall x [M(x) \rightarrow P(x)]\}'' = \{\exists x [M(x) \wedge P'(x)]\}' = \forall x [M(x) \rightarrow P''(x)] = \forall x [M(x) \rightarrow P(x)]$

(2) $\{\exists x [M(x) \wedge P(x)]\}'' = \{\forall x [M(x) \rightarrow P'(x)]\}' = \exists x [M(x) \wedge P''(x)] = \exists x [M(x) \wedge P(x)]$

限定推論

$P(x)$ を命題関数とし、変数 x の変域を X とするとき、次の 4 つの法則を限定推論という。

(1) 全称限定 : $\forall x P(x) \Rightarrow$ 変域 X の任意の要素 a について $P(a)$

全称限定は、「変域内のすべての要素について $P(x)$ が成り立つ」という命題から、
「その変域内の任意の要素 a について $P(a)$ が成り立つ」ことを推論する。

(2) 全称概括 : 変域 X の任意の要素 a について $P(a) \Rightarrow \forall x P(x)$

全称概括は、「変域内の任意の要素 a について $P(a)$ が成り立つ」という命題から、
「その変域内のすべての要素について $P(x)$ が成り立つ」ことを推論する。

(3) 存在限定 : $\exists x P(x) \Rightarrow$ 変域 X のある要素 a について $P(a)$

存在限定は、「変域内に $P(x)$ が成り立つような要素が少なくとも一つは存在する」という命題から、
「その変域内のある要素 a について $P(a)$ が成り立つ」ことを推論する。

(4) 存在概括 : 変域 X のある要素 a について $P(a) \Rightarrow \exists x P(x)$

存在概括は、「変域内のある特定の要素 a について $P(a)$ が成り立つ」という命題から、
「その変域内に $P(x)$ が成り立つような要素が少なくとも一つは存在する」ということを推論する。

【例題 9】 次の論法が妥当な限定推論であることを証明せよ。

(前提) 「すべての偶数は 2 で割り切れる。」 かつ 「8 は偶数である。」

(結論) ゆえに 「8 は 2 で割り切れる。」

(解)

$M(x)$: 「 x は偶数である。」

$D(x)$: 「 x は 2 で割り切れる。」

a : 8

とおくと

「すべての偶数は 2 で割り切れる。」 : $\forall x[M(x) \rightarrow D(x)]$

すなわち 「すべての x について、 x は偶数である ならば x は 2 で割り切れる。」と同義。

「8 は偶数である。」 : $M(a)$

そこで問題の前提を論理式の形でまとめて記すと $M(a) \wedge \{\forall x[M(x) \rightarrow D(x)]\}$

ここで前述の限定推論における全称限定の公式 $\forall x P(x) \Rightarrow P(a)$ を用いると $\forall x[M(x) \rightarrow D(x)] \Rightarrow [M(a) \rightarrow D(a)]$

となるので、問題の前提部分は $M(a) \wedge [M(a) \rightarrow D(a)]$ と記せる。

そこで 推論方式における三段論法肯定式の公式 $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ を用いて

$M(a) \wedge [M(a) \rightarrow D(a)] \Rightarrow D(a)$: 「8 は 2 で割り切れる。」

を得る。

よって 推論は妥当である。