

積分

1 不定積分

関数 $f(x)$ に対して、 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ を満たすような関数 $F(x)$ を求める演算操作のことを不定積分と呼び、次式のように表記する。

$$F(x) = \int f(x) dx + C$$

ただし C は積分定数と呼ばれる任意定数である。したがって

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx} \int f(x) dx + \frac{d}{dx}C = f(x)$$

となる。このとき $F(x)$ を原始関数という。すなわち積分は微分の逆演算である。

2 不定積分の一般公式

二つの関数を $f(x)$, $g(x)$ とし、定数を c とするとき、次の式が成り立つ。

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

3 関数の不定積分

(ただし 積分定数 C は省略)

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \quad (n \text{ は実数 かつ } n \neq -1)$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log_e |x|$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \tan x dx = -\log_e |\cos x|$$

$$\int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \frac{-1}{\tan x}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a}, \quad (a > 0 \text{ かつ } a \neq 1)$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \log_e x dx = x \log_e x - x, \quad (\text{ただし } x > 0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arccos x \\
\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x \\
\int \arcsin x dx &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \\
\int \arccos x dx &= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} \\
\int \arctan x dx &= x \arctan x - \frac{1}{2} \log_e(1+x^2) \\
\int \sinh x dx &= \cosh x \\
\int \cosh x dx &= \sinh x \\
\int \tanh x dx &= \log_e |\cosh x| \\
\int \frac{1}{x^2-a^2} dx &= \frac{1}{2a} \log_e \left| \frac{x-a}{x+a} \right|, \quad (a \neq 0) \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}} dx &= \log_e |x + \sqrt{x^2+A}|, \quad (A \neq 0)
\end{aligned}$$

[例]

$$\begin{aligned}
\int (8+2x+3x^2+4x^3+5x^4+x^{-1}-x^{-2}-2x^{-3}) dx &= 8x+x^2+x^3+x^4+x^5+\log_e|x|+x^{-1}+x^{-2}+C \\
\int (3\sin x+5\cos x+7\tan x) dx &= -3\cos x+5\sin x-7\log_e|\cos x|+C \\
\int (2^x+e^x+\log_e x) dx &= \frac{2^x}{\log_e 2}+e^x+x\log_e x-x+C, \quad (\text{ただし } x>0)
\end{aligned}$$

4 置換積分法

関数 $f(g(x))$ の積分については、次のような置換積分の方法が用いられる。

$\int f(g(x)) dx$ の積分方法は $t=g(x)$ と置いて変数 x を t に変換し、変数 t について積分した後、 $t=g(x)$ より変数 t を元の変数 x に戻して結果を表す。

[例]

$$\begin{aligned}
&\int (ax+b)^n dx, \quad (\text{ただし } a, b, n \text{ は定数}) \\
&t=ax+b \text{ と置くと、 } (ax+b)^n = t^n \text{ かつ } \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(ax+b) = a \\
&\text{すなわち } \frac{dt}{dx} = a \text{ より、 } dx = \frac{1}{a} dt \text{ となるので} \\
&= \int t^n \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} \int t^n dt = \frac{1}{a(n+1)} t^{n+1} + C, \quad \text{ここで } t=ax+b \text{ であったから} \\
&= \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} + C, \quad (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

[例]

$$\int \sin(ax+b) dx, \quad (\text{ただし } a, b \text{ は定数})$$

$$t = ax + b \text{ と置くと、 } \sin(ax + b) = \sin t \text{ かつ } \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(ax + b) = a$$

$$\text{すなわち } dx = \frac{1}{a} dt \text{ となるので}$$

$$\begin{aligned} &= \int (\sin t) \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} \int \sin t dt = -\frac{1}{a} \cos t + C \\ &= -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C \end{aligned}$$

[例]

$$\int (ax + b)^{-1} dx, \quad (\text{ただし } a, b \text{ は定数})$$

$$t = ax + b \text{ と置くと、 } (ax + b)^{-1} = t^{-1} \text{ かつ } dx = \frac{1}{a} dt \text{ となるので}$$

$$\begin{aligned} &= \int t^{-1} \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{a} \log_e |t| + C \\ &= \frac{1}{a} \log_e |ax + b| + C \end{aligned}$$

[例]

$$\int e^{ax+b} dx, \quad (\text{ただし } a, b \text{ は定数})$$

$$t = ax + b \text{ と置くと、 } e^{ax+b} = e^t \text{ かつ } dx = \frac{1}{a} dt \text{ となるので}$$

$$\begin{aligned} &= \int e^t \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} \int e^t dt = \frac{1}{a} e^t + C \\ &= \frac{1}{a} e^{ax+b} + C \end{aligned}$$

[例]

$$\int \tan(ax + b) dx, \quad (\text{ただし } a, b \text{ は定数})$$

$$\tan(ax + b) = \frac{\sin(ax + b)}{\cos(ax + b)} \text{ より } t = \cos(ax + b) \text{ と置くと、 } \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx} \cos(ax + b) = -a \sin(ax + b)$$

$$\text{すなわち } dx = \frac{1}{-a \sin(ax + b)} dt \text{ となるので}$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\sin(ax + b)}{t} \left[\frac{1}{-a \sin(ax + b)} \right] dt = \frac{1}{-a} \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{a} \log_e |t| + C \\ &= -\frac{1}{a} \log_e |\cos(ax + b)| + C \end{aligned}$$

5 部分積分法

二つの関数 $f(x)$, $g(x)$ があるとき、次の公式で与えるような積分が可能である。

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

[例]

$$\int 5xe^{3x} dx$$

$$f(x) = 5x, \quad g'(x) = e^{3x} \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(5x) = 5 \quad \text{かつ} \quad g(x) = \int g'(x) dx = \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} \quad \text{であるから} \\
&= 5x \frac{e^{3x}}{3} - \int 5 \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{5}{3} x e^{3x} - \frac{5}{3} \int e^{3x} dx = \frac{5}{3} x e^{3x} - \frac{5}{3} \left(\frac{e^{3x}}{3} \right) + C \\
&= \frac{5}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C
\end{aligned}$$

[例]

$$\int \sin x e^{2x} dx$$

$$f(x) = \sin x, \quad g'(x) = e^{2x} \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \text{かつ} \quad g(x) = \int g'(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \quad \text{であるから} \\
&= \sin x \frac{e^{2x}}{2} - \int \cos x \frac{e^{2x}}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} \sin x e^{2x} - \frac{1}{2} \int \cos x e^{2x} dx
\end{aligned}$$

第2項について再び部分積分の方法を適用する。

$$f_1(x) = \cos x, \quad g'_1(x) = e^{2x} \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{aligned}
f'_1(x) &= \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \text{かつ} \quad g_1(x) = \int g'_1(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \quad \text{であるから} \\
&= \frac{1}{2} \sin x e^{2x} - \frac{1}{2} \left[\cos x \frac{e^{2x}}{2} - \int (-\sin x) \frac{e^{2x}}{2} dx \right] \\
&= \frac{1}{2} \sin x e^{2x} - \frac{1}{4} \cos x e^{2x} - \frac{1}{4} \int \sin x e^{2x} dx
\end{aligned}$$

ここで第3項を左辺に移項して

$$\begin{aligned}
\int \sin x e^{2x} dx + \frac{1}{4} \int \sin x e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \sin x e^{2x} - \frac{1}{4} \cos x e^{2x} \\
\left(1 + \frac{1}{4} \right) \int \sin x e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \sin x e^{2x} - \frac{1}{4} \cos x e^{2x} \\
\int \sin x e^{2x} dx &= \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} \sin x e^{2x} - \frac{1}{4} \cos x e^{2x} \right) + C
\end{aligned}$$

$$\int \sin x e^{2x} dx = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) + C$$

6 定積分

関数 $f(x)$ の定積分について述べる。

関数 $f(x)$ の不定積分 $F(x) = \int f(x) dx$ において、 $x = a$ から $x = b$ までの定積分 $\int_a^b f(x) dx$ とは次式により与えられる。

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

7 定積分の一般公式

二つの関数を $f(x)$, $g(x)$ とし、定数を c とするとき、次の式が成り立つ。

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$
$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

[例]

$$\int_a^b x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_a^b = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}) , \quad (n \text{ は実数 かつ } n \neq -1)$$

[例]

$$\int_a^b x^{-1} dx = [\log_e |x|]_a^b = \log_e |b| - \log_e |a|$$

[例]

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

[例]

$$\int_0^\pi \cos x dx = [\sin x]_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$$

[例]

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx &= [-\log_e(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\log_e(\cos \frac{\pi}{3}) - [-\log_e(\cos 0)] = -\log_e\left(\frac{1}{2}\right) + \log_e(1) = -\log_e\left(\frac{1}{2}\right) + 0 \\ &= -[\log_e(1) - \log_e(2)] = -[0 - \log_e(2)] = \log_e 2 \end{aligned}$$

[例]

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

[例]

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} dx = \left[\frac{-1}{\tan x} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{\tan \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\tan \frac{\pi}{6}} = -\sqrt{2} + 2$$

[例]

$$\int_0^1 a^x dx = \left[\frac{a^x}{\log_e a} \right]_0^1 = \frac{a^1}{\log_e a} - \frac{a^0}{\log_e a} = \frac{a-1}{\log_e a} , \quad (a > 0 \text{ かつ } a \neq 1)$$

[例]

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

[例]

$$\int_1^2 \log_e x dx = [x \log_e x - x]_1^2 = 2 \log_e 2 - 2 - \log_e 1 + 1 = 2 \log_e 2 - 1$$

[例]

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

[例]

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arccos x]_0^{\frac{1}{2}} = \arccos \frac{1}{2} - \arccos 0 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}$$

[例]

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

8 置換積分法による定積分

置換積分の方法を用いた定積分について述べる。

$\int_a^b f(g(x)) dx$ の積分方法は $t = g(x)$ と置いて変数 x を t に変換し、変数 t について積分した後、積分範囲を $g(a)$ から $g(b)$ までとして結果を求める。

[例]

$$\int_0^1 (ax+b)^n dx, \quad (\text{ただし } a, b, n \text{ は定数})$$

$t = ax + b$ と置くと、 $x = 0$ のとき t の値は b 、 $x = 1$ のとき t の値は $a + b$

また $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(ax+b) = a$ 、すなわち $dx = \frac{1}{a} dt$ より

$$\begin{aligned} &= \int_b^{a+b} t^n \frac{1}{a} dt = \left[\frac{1}{a(n+1)} t^{n+1} \right]_b^{a+b} = \frac{1}{a(n+1)} (a+b)^{n+1} - \frac{1}{a(n+1)} b^{n+1} \\ &= \frac{1}{a(n+1)} [(a+b)^{n+1} - b^{n+1}] \end{aligned}$$

[例]

$$\int_0^1 (ax+b)^{-1} dx, \quad (\text{ただし } a, b \text{ は定数})$$

$t = ax + b$ と置くと、 $x = 0$ のとき t の値は b 、 $x = 1$ のとき t の値は $a + b$

また $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(ax+b) = a$ 、すなわち $dx = \frac{1}{a} dt$ より

$$= \int_b^{a+b} t^{-1} \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} [\log_e |t|]_b^{a+b} = \frac{1}{a} [\log_e |a+b| - \log_e |b|] = \frac{1}{a} \log_e \left| \frac{a+b}{b} \right|$$

[例]

$$\int_0^1 e^{ax+b} dx, \quad (\text{ただし } a, b \text{ は定数})$$

$t = ax + b$ と置くと、 $x = 0$ のとき t の値は b 、 $x = 1$ のとき t の値は $a + b$

また $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(ax+b) = a$ 、すなわち $dx = \frac{1}{a} dt$ より

$$= \int_b^{a+b} e^t \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} [e^t]_b^{a+b} = \frac{1}{a} (e^{a+b} - e^b) = \frac{1}{a} e^b (e^a - 1)$$

[例]

$$\int_0^1 \tan(ax+b) dx, \quad (\text{ただし } a, b \text{ は定数})$$

$\tan(ax+b) = \frac{\sin(ax+b)}{\cos(ax+b)}$ より $t = \cos(ax+b)$ とおくと、

$x = 0$ のとき t の値は $\cos b$, $x = 1$ のとき t の値は $\cos(a + b)$

また $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx} \cos(ax + b) = -a \sin(ax + b)$, すなわち $dx = \frac{1}{-a \sin(ax + b)} dt$ より

$$\begin{aligned} &= \int_{\cos b}^{\cos(a+b)} \frac{\sin(ax + b)}{t} \left[\frac{1}{-a \sin(ax + b)} \right] dt = \frac{1}{-a} \int_{\cos b}^{\cos(a+b)} \frac{1}{t} dt = \left[\frac{-1}{a} \log_e |t| \right]_{\cos b}^{\cos(a+b)} \\ &= \frac{-1}{a} \log_e |\cos(a + b)| + \frac{1}{a} \log_e |\cos b| = \frac{1}{a} \log_e \left| \frac{\cos b}{\cos(a + b)} \right| \end{aligned}$$

9 部分積分法による定積分

二つの関数 $f(x)$, $g(x)$ があるとき、次の公式による定積分が可能である。

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

[例]

$$\int_0^1 5x e^{3x} dx$$

$f(x) = 5x$, $g'(x) = e^{3x}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(5x) = 5 \quad \text{並びに} \quad g(x) = \int g'(x) dx = \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} \quad \text{より} \\ &= \left[5x \frac{e^{3x}}{3} \right]_0^1 - \int_0^1 5 \frac{e^{3x}}{3} dx = \left(\frac{5}{3} e^3 - 0 \right) - \frac{5}{3} \int_0^1 e^{3x} dx = \frac{5}{3} e^3 - \frac{5}{3} \left[\frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^1 = \frac{5}{3} e^3 - \frac{5}{9} (e^3 - e^0) \\ &= \frac{10}{9} e^3 + \frac{5}{9} \end{aligned}$$

[例]

$$\int_0^1 \sin x e^{2x} dx$$

$f(x) = \sin x$, $g'(x) = e^{2x}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \text{並びに} \quad g(x) = \int g'(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \quad \text{より} \\ &= \left[\sin x \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \cos x \frac{e^{2x}}{2} dx \\ &= (\sin 1) \frac{e^2}{2} - (\sin 0) \frac{e^0}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \cos x e^{2x} dx \end{aligned}$$

第3項について再び部分積分の方法を適用して

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \cos x, \quad g'_1(x) = e^{2x} \quad \text{とおくと} \\ f'_1(x) &= \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \text{並びに} \quad g_1(x) = \int g'_1(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \quad \text{より} \\ &= \frac{1}{2} (\sin 1) e^2 - (\sin 0) \frac{e^0}{2} - \frac{1}{2} \left\{ \left[\cos x \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 (-\sin x) \frac{e^{2x}}{2} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\sin 1) e^2 - \frac{1}{2} \left\{ \left(\cos 1 \frac{e^2}{2} - \cos 0 \frac{e^0}{2} \right) + \frac{1}{2} \int_0^1 \sin x e^{2x} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\sin 1) e^2 - \frac{1}{4} [(\cos 1) e^2 - 1] - \frac{1}{4} \int_0^1 \sin x e^{2x} dx \end{aligned}$$

ここで第 3 項を左辺に移項して

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right) \int_0^1 \sin x \, e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}(\sin 1) \, e^2 - \frac{1}{4}[(\cos 1) \, e^2 - 1]$$

$$\int_0^1 \sin x \, e^{2x} \, dx = \frac{4}{5} \left[\frac{1}{2}(\sin 1) \, e^2 - \frac{1}{4}(\cos 1) \, e^2 + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{5} [(2 \sin 1 - \cos 1)e^2 + 1]$$