

微分方程式

未知関数 y とその導関数 $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$ (n は自然数) を含む方程式のことを微分方程式という。最高次の導関数が $y^{(1)}$ であるような微分方程式は一階微分方程式、最高次の導関数が $y^{(2)}$ であるような微分方程式は二階微分方程式と呼ばれる。一般に最高次の導関数が $y^{(n)}$ の微分方程式は n 階微分方程式と呼ばれる。

[一階微分方程式の例]

$$2\frac{dy}{dx} + 5y = 3$$

$$\frac{dy}{dx} + x^2y = x$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3y = x^2$$

[二階微分方程式の例]

$$3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 5$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 8xy = 1$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 5y = x$$

微分方程式を満たすような関数 $y = f(x)$ のことを、その微分方程式の解という。

一般に微分方程式の解は一つとは限らない。 n 階微分方程式の解は n 個の任意定数を含むことが知られており、このような解は一般解と呼ばれる。これに対して任意定数を含まない解のことを特殊解という。

また微分方程式が解をもたない場合もある。解を求める操作を「微分方程式を解く」という。

1 変数分離形の一階微分方程式

次のように右辺が x の関数 $f(x)$ と y の関数 $g(y)$ に分離できる形の一階微分方程式を変数分離形という。

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

[例]

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$y\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 2x$$

$$y^2\frac{dy}{dx} + y\frac{dy}{dx} - x = 0$$

2 変数分離形の解法

変数分離形の解法を示す。

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \text{より} \quad \frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

解は $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + c$, (c は任意定数)

積分した結果の式について、可能であれば y について解く。
積分した結果の式が必ずしも y について解けるとは限らない。

[例]

$\frac{dy}{dx} = 3x$ の解を求める。

$dy = 3x dx$ より $\int dy = \int 3x dx + c$, (c は任意定数)

解は $y = \frac{3}{2}x^2 + c$

[例]

$\frac{dy}{dx} = 2y$ の解を求める。

$\frac{1}{y} dy = 2 dx$ より $\int \frac{1}{y} dy = \int 2 dx + c$, (c は任意定数)

$\log_e |y| = 2x + c$
 $y = \pm e^{2x+c} = \pm e^{2x} e^c$, ここで $C = \pm e^c$ とおくと

解は $y = Ce^{2x}$, (C は任意定数)

[例]

$\frac{dy}{dx} = 2xy$ の解を求める。

$\frac{1}{y} dy = 2x dx$ より $\int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx + c$, (c は任意定数)

$\log_e |y| = x^2 + c$
 $y = \pm e^{x^2+c} = \pm e^{x^2} e^c$, ここで $C = \pm e^c$ とおくと

解は $y = Ce^{x^2}$, (C は任意定数)

[例]

$y \frac{dy}{dx} - 3x^2 = 2x$ の解を求める。

$y dy = (3x^2 + 2x) dx$ より $\int y dy = \int (3x^2 + 2x) dx + c$, (c は任意定数)

$\frac{1}{2}y^2 = x^3 + x^2 + c$

$y^2 = 2(x^3 + x^2) + 2c$, ここで $C = 2c$ とおくと

解は $y = \pm \sqrt{2(x^3 + x^2) + C}$, (C は任意定数)

3 一階線形微分方程式

次のように y と y' について 1 次の 1 階微分方程式のことを一階線形微分方程式という。

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

ただし $P(x), Q(x)$ は既知の関数である。(線形でない微分方程式は非線形微分方程式と呼ばれる。)

4 一階線形微分方程式の解法

一階線形微分方程式の解法を示す。

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad \text{の両辺に} \quad e^{\int P(x)dx} \quad \text{をかけて} \quad \frac{dy}{dx}e^{\int P(x)dx} + yP(x)e^{\int P(x)dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$\text{ここで 左辺} = \frac{d}{dx} \left(ye^{\int P(x)dx} \right) \quad \text{と記せるので} \quad \frac{d}{dx} \left(ye^{\int P(x)dx} \right) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$\text{そこで両辺を } x \text{ について積分すると} \quad ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C, \quad (C \text{ は任意定数})$$

$$\text{よって} \quad y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

5 一階線形微分方程式の解の公式

一階線形微分方程式の解の公式と応用例を示す。

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right], \quad (C \text{ は任意定数})$$

[例]

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 3 \quad \text{の解を求める。}$$

$$\begin{aligned} P(x) = 2 \quad \text{並びに} \quad Q(x) = 3 \quad \text{と} \quad \text{おいて} \quad y &= e^{-\int 2dx} \left(\int 3e^{\int 2dx} dx + C \right) = e^{-2x} \left(\int 3e^{2x} dx + C \right) \\ &= e^{-2x} \left(\frac{3}{2}e^{2x} + C \right) = \frac{3}{2} + Ce^{-2x} \end{aligned}$$

$$\text{解は} \quad y = \frac{3}{2} + Ce^{-2x}, \quad (C \text{ は任意定数})$$

[例]

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 3x \quad \text{の解を求める。}$$

$$P(x) = 2 \quad \text{並びに} \quad Q(x) = 3x \quad \text{と} \quad \text{おいて}$$

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 2dx} \left(\int 3xe^{\int 2dx} dx + C \right) = e^{-2x} \left(\int 3xe^{2x} dx + C \right) \\ &= e^{-2x} \left(3x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int 3 \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx + C \right), \quad (\text{部分積分法を使用}) \\ &= e^{-2x} \left(\frac{3}{2}xe^{2x} - \frac{3}{2}e^{2x} + C \right) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + Ce^{-2x} = \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) + Ce^{-2x} \end{aligned}$$

$$\text{解は} \quad y = \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) + Ce^{-2x}, \quad (C \text{ は任意定数})$$

6 ベルヌーイ微分方程式

次の微分方程式はベルヌーイ微分方程式と呼ばれ、非線形微分方程式に属する。

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^n Q(x)$$

ただし $P(x), Q(x)$ は既知の関数であり、 n は実数である。この微分方程式は n が 0 または 1 のときに限り、前述の一階線形微分方程式に帰着する。

7 ベルヌーイ微分方程式の解法

ベルヌーイ微分方程式の解法を示す。

$$z = y^{1-n} \quad \text{とおくと} \quad y = zy^n$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}y^{1-n} = (1-n)y^{1-n-1} \frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} \quad \text{より}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} y^n \frac{dz}{dx}$$

そこでこれらをベルヌーイ微分方程式に代入すると

$$\frac{1}{1-n} y^n \frac{dz}{dx} + zy^n P(x) = y^n Q(x) \quad \text{となるので} \quad \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + zP(x) = Q(x)$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{dz}{dx} + (1-n)zP(x) = (1-n)Q(x)$$

これは未知関数 z についての一階線形微分方程式に他ならない。

この一階線形微分方程式の解は

$$z = e^{-\int(1-n)P(x)dx} \left[\int (1-n)Q(x) e^{\int(1-n)P(x)dx} dx + C \right] \quad \text{であったから}$$

ベルヌーイ微分方程式の解としては $z = y^{1-n}$ を用いて

$$y = z^{\frac{1}{1-n}} = \left\{ e^{-(1-n)\int P(x)dx} \left[(1-n) \int Q(x) e^{(1-n)\int P(x)dx} dx + C \right] \right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

[例]

$$\frac{dy}{dx} + 5y = 3y^2 \quad \text{の解を求める。}$$

$$P(x) = 5 \quad \text{並びに} \quad Q(x) = 3 \quad \text{とおいて}$$

$$\begin{aligned} y &= \left\{ e^{-(1-2)\int 5dx} \left[(1-2) \int 3e^{(1-2)\int 5dx} dx + C \right] \right\}^{\frac{1}{1-2}} = \left\{ e^{\int 5dx} \left[-\int 3e^{-\int 5dx} dx + C \right] \right\}^{-1} \\ &= \left\{ e^{5x} \left[-\int 3e^{-5x} dx + C \right] \right\}^{-1} = \left\{ e^{5x} \left[\frac{3}{5}e^{-5x} + C \right] \right\}^{-1} = \left[\frac{3}{5} + Ce^{5x} \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{解は} \quad y = \left[\frac{3}{5} + Ce^{5x} \right]^{-1}, \quad (C \text{ は任意定数})$$

[例]

$$\frac{dy}{dx} + 5y = 3xy^2 \quad \text{の解を求める。}$$

$$\begin{aligned} y &= \left\{ e^{-(1-2)\int 5dx} \left[(1-2) \int 3xe^{(1-2)\int 5dx} dx + C \right] \right\}^{\frac{1}{1-2}} = \left\{ e^{\int 5dx} \left[-\int 3xe^{-\int 5dx} dx + C \right] \right\}^{-1} \\ &= \left\{ e^{5x} \left[-\int 3xe^{-5x} dx + C \right] \right\}^{-1} = \left\{ -e^{5x} \left[\int 3xe^{-5x} dx - C \right] \right\}^{-1} \\ &= \left\{ -e^{5x} \left[3x \cdot \frac{e^{-5x}}{(-5)} - \int 3 \cdot \frac{e^{-5x}}{(-5)} dx - C \right] \right\}^{-1}, \quad (\text{部分積分法を使用}) \end{aligned}$$

$$= \left\{ -e^{5x} \left[-\frac{3}{5}xe^{-5x} - \frac{3}{(-5)^2}e^{-5x} - C \right] \right\}^{-1} = \left[\frac{3}{5}x + \frac{3}{5^2} + Ce^{5x} \right]^{-1} = \left[\frac{3}{5} \left(x + \frac{1}{5} \right) + Ce^{5x} \right]^{-1}$$

$$\text{解は } y = \left[\frac{3}{5} \left(x + \frac{1}{5} \right) + Ce^{5x} \right]^{-1}, \quad (C \text{ は任意定数})$$

8 二階線形微分方程式

次の微分方程式は二階線形微分方程式と呼ばれる。

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + yR(x) = H(x)$$

ただし $P(x), Q(x), R(x), H(x)$ は既知の関数である。特に既知関数 $P(x), Q(x), R(x)$ がそれぞれ定数 a, b, c であるとき、

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = H(x)$$

を定数係数二階線形微分方程式という。この微分方程式の右辺 $H(x) = 0$ である場合

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

を同次という。

9 同次の定数係数二階線形微分方程式の解法

同次の定数係数二階線形微分方程式の解法を示す。

$$y = e^{tx} \text{ において } a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \text{ に代入すると } a\frac{d^2}{dx^2}e^{tx} + b\frac{d}{dx}e^{tx} + ce^{tx} = 0$$

$$at^2e^{tx} + bte^{tx} + ce^{tx} = 0 \quad \text{すなわち} \quad (at^2 + bt + c)e^{tx} = 0$$

したがって微分方程式の両辺が等しくなるためには、 t の値が 2 次方程式

$$at^2 + bt + c = 0$$

を満たす必要がある。この 2 次方程式は特性方程式と呼ばれる。

(i) 特性方程式が、二つの異なる実数解 α, β をもつとき、

$$y = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x}, \quad (\text{ただし } C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

(ii) 特性方程式が、重解 α をもつとき、

$$y = (C_1 + C_2x)e^{\alpha x}$$

(iii) 特性方程式が、虚数解 $h \pm ni$ をもつとき、

$$y = e^{hx}(C_1 \cos nx + C_2 \sin nx)$$

[例]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \text{ の解を求める。}$$

$$y = e^{tx} \text{ において代入すると } \frac{d^2}{dx^2}e^{tx} - 3\frac{d}{dx}e^{tx} + 2e^{tx} = 0 \quad \text{より} \quad t^2e^{tx} - 3te^{tx} + 2e^{tx} = 0$$

$$\text{すなわち} \quad (t^2 - 3t + 2)e^{tx} = 0$$

このことから微分方程式の両辺が等しくなるためには、 t の値が 2 次方程式

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

を満たす必要がある。

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

したがって $t = \alpha = \frac{3+1}{2} = 2$, $t = \beta = \frac{3-1}{2} = 1$ となるので

解は $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$, (ただし C_1, C_2 は任意定数)

[例]

$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 0$ の解を求める。

$y = e^{tx}$ において代入すると $\frac{d^2}{dx^2} e^{tx} - 4 \frac{d}{dx} e^{tx} + 4e^{tx} = 0$ より $t^2 e^{tx} - 4t e^{tx} + 4e^{tx} = 0$

すなわち $(t^2 - 4t + 4)e^{tx} = 0$

このことから微分方程式の両辺が等しくなるためには、 t の値が 2 次方程式

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

を満たす必要がある。

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2$$

したがって $t = \alpha = 2$ となり、重解であるから

解は $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$, (ただし C_1, C_2 は任意定数)

[例]

$\frac{d^2 y}{dx^2} - 8 \frac{dy}{dx} + 25y = 0$ の解を求める。

$y = e^{tx}$ において代入すると $\frac{d^2}{dx^2} e^{tx} - 8 \frac{d}{dx} e^{tx} + 25e^{tx} = 0$ より $t^2 e^{tx} - 8t e^{tx} + 25e^{tx} = 0$

すなわち $(t^2 - 8t + 25)e^{tx} = 0$

このことから微分方程式の両辺が等しくなるためには、 t の値が 2 次方程式

$$t^2 - 8t + 25 = 0$$

を満たす必要がある。

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{64-100}}{2} = 4 \pm 3i = h \pm ni \text{ となる。}$$

したがって $h = 4, n = 3$

解は $y = e^{4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$, (C_1, C_2 は任意定数)

10 初期値問題

微分方程式の解は任意定数 C を含み、一般には解が無数に存在する。ところがこの解に対してある条件を付すと任意定数 C が定まり、微分方程式の解は一意に決まる。このような条件は初期条件と呼ばれ、この初期条件を満たす解を求める問題のことを初期値問題という。

例えば一階微分方程式の解が $y = f(x, C)$ であるとき、初期条件として $x = a$ のとき $y = b$ とすると、 $b = f(a, C)$ より任意定数 C が定まる。ここで a, b は与えられた既知の定数である。

11 一階微分方程式の初期値問題

[例]

$\frac{dy}{dx} = 2x$ について、初期条件 $x = 2$ のとき $y = 5$ を満たす解を求める。

$$y = \int 2x \, dx + c, \quad (\text{ただし } c \text{ は任意定数})$$

$$\text{一般解は } y = x^2 + c$$

ここで初期条件 $x = 2$ のとき $y = 5$ を代入して、 $5 = 2^2 + c$ 、したがって $c = 5 - 2^2 = 1$ より

$$\text{初期条件を満たす解は } y = x^2 + 1$$

[例]

$\frac{dy}{dx} = 3y$ について、初期条件 $x = 0$ のとき $y = 2$ を満たす解を求める。

$$\frac{1}{y} dy = 3 dx \quad \text{より} \quad \int \frac{1}{y} dy = \int 3 dx + c \quad \text{すなわち} \quad \log_e |y| = 3x + c, \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$y = e^{3x+c} = e^{3x} e^c = C e^{3x}, \quad (\text{ただし } C = e^c)$$

$$\text{一般解は } y = C e^{3x}$$

ここで初期条件 $x = 0$ のとき $y = 2$ を代入して、 $2 = C e^0 = C$ 、したがって $C = 2$ より

$$\text{初期条件を満たす解は } y = 2e^{3x}$$

[例]

$\frac{dy}{dx} = 2xy$ について、初期条件 $x = 0$ のとき $y = 5$ を満たす解を求める。

$$\frac{1}{y} dy = \int 2x \, dx \quad \text{より} \quad \int \frac{1}{y} dy = \int 2x \, dx + c \quad \text{すなわち} \quad \log_e |y| = x^2 + c, \quad (c \text{ は任意定数})$$

$$y = e^{x^2+c} = e^{x^2} e^c = e^{x^2} C, \quad (\text{ただし } C = e^c)$$

$$\text{一般解は } y = C e^{x^2}$$

ここで初期条件 $x = 0$ のとき $y = 5$ を代入して、 $5 = C e^0 = C$ 、したがって $C = 5$ より

$$\text{初期条件を満たす解は } y = 5e^{x^2}$$

[例]

$\frac{dy}{dx} + 2y = 5$ について、初期条件 $x = 0$ のとき $y = 3$ を満たす解を求める。

$$y = e^{-\int 2dx} \left(\int 5e^{\int 2dx} dx + C \right) = e^{-2x} \left(\int 5e^{2x} dx + C \right) = e^{-2x} \left(\frac{5}{2} e^{2x} + C \right) = \frac{5}{2} + C e^{-2x}$$

$$\text{一般解は } y = \frac{5}{2} + C e^{-2x}$$

ここで初期条件 $x = 0$ のとき $y = 3$ を代入して、 $3 = \frac{5}{2} + C e^0$ 、したがって $C = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ より

$$\text{初期条件を満たす解は } y = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} e^{-2x}$$

12 二階微分方程式の初期値問題

二階微分方程式の一般解は二つの任意定数 C_1, C_2 を含む。すなわち二階微分方程式の一般解が $y = f(x, C_1, C_2)$ であるとき、初期条件として $x = a$ のとき $y = b_1$ かつ $\frac{dy}{dx} = b_2$ とすると、

$$b_1 = f(a, C_1, C_2) \quad \text{かつ} \quad b_2 = \left[\frac{d}{dx} f(x, C_1, C_2) \right]_{x=a} \quad \text{より}$$

任意定数 C_1, C_2 が定まる。ここで a, b_1, b_2 は与えられた既知の定数である。

[例]

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6$ について、初期条件 $x = 0$ のとき $y = 3$ かつ $\frac{dy}{dx} = 10$ を満たす解を求める。

$$\frac{dy}{dx} = \int 6 dx + c_1 = 6x + c_1 \quad \text{より} \quad \frac{dy}{dx} = 6x + c_1$$

$$y = \int (6x + c_1) dx = 3x^2 + c_1x + c_2$$

一般解は $y = 3x^2 + c_1x + c_2$, (c_1, c_2 は任意定数)

初期条件 $x = 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = 10$ を $\frac{dy}{dx} = 6x + c_1$ に代入すると $10 = 6 \times 0 + c_1$

したがって $c_1 = 10$ となるので $y = 3x^2 + 10x + c_2$

さらに初期条件 $x = 0$ のとき $y = 3$ を $y = 3x^2 + 10x + c_2$ に代入すると $3 = 3 \times 0^2 + 10 \times 0 + c_2$

したがって $c_2 = 3$ となるので

初期条件を満たす解は $y = 3x^2 + 10x + 3$

[例]

$\frac{d^2y}{dx^2} = -9y$ について、初期条件 $x = 0$ のとき $y = 4$ かつ $\frac{dy}{dx} = 6$ を満たす解を求める。

$y = e^{tx}$ とおいて代入すると $\frac{d^2}{dx^2}e^{tx} = -9e^{tx}$ より $t^2e^{tx} = -9e^{tx}$ すなわち $(t^2 + 9)e^{tx} = 0$ となるので

特性方程式は $t^2 + 9 = 0$

$t = \pm 3i = 0 \pm 3i$ (虚数解)

一般に特性方程式が、虚数解 $h \pm ni$ をもつときは、定数係数二階線形微分方程式の一般解の公式は、

$y = e^{hx}(C_1 \cos nx + C_2 \sin nx)$ であったから $h = 0, n = 3$ として

一般解は $y = e^0(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

そこで $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x$

$x = 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = 6$ を $\frac{dy}{dx} = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x$ に代入して

$6 = -3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0$ したがって $C_2 = \frac{6}{3} = 2$ より

$y = C_1 \cos 3x + 2 \sin 3x$

さらに $x = 0$ のとき $y = 4$ を $y = C_1 \cos 3x + 2 \sin 3x$ に代入して

$4 = C_1 \cos 0 + 2 \sin 0$ したがって $C_1 = 4$ より

初期条件を満たす解は $y = 4 \cos 3x + 2 \sin 3x$