

角運動量保存則

角運動量保存則：「外系より力のモーメントが作用しない限り、粒子のもつ角運動量は保存される。」

[注] 太文字の記号はベクトルを表示する。

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega} - m(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r} = \text{一定} \quad : \quad \text{角運動量保存則}$$

ただし $\mathbf{L}$ は角運動量、 m は粒子の質量、 $\mathbf{r}$ は位置、 $\boldsymbol{\omega}$ は角速度である。ここで 位置を表すベクトル $\mathbf{r}$ は動径ベクトルとも呼ばれる。

粒子が半径 $r = |\mathbf{r}|$ の円軌道上を運動する場合には、 $\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ となるので、前述の角運動量保存則は次式のように記せる。

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega} = \text{一定}$$

慣性モーメント $I = mr^2$ を定義すると上式は次のように簡潔に表せる。

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} = \text{一定}$$

ここで 慣性モーメント I は動径ベクトル $\mathbf{r}$ の二乗に比例する。すなわち 慣性モーメント I は粒子の軌道半径 r の二乗に比例して大きくなる。したがって 円運動している粒子に作用する向心力が緩やかに減少して軌道半径 r が増加すると、角運動量保存則より $I\boldsymbol{\omega}$ は一定なので粒子の角速度 $\boldsymbol{\omega}$ が小さくなる。なお 向心力は常に軌道半径の方向に作用する力であって粒子の進行方向を変えるのみに寄与しており、粒子の角速度には影響を与えない。すなわち 向心力は外力のモーメントとして作用しない。

[角運動量保存則の応用例]

粒子が半径 r の軌道上を角速度 ω_0 でもって円運動しているとき、向心力が緩やかに増加して軌道半径が $\frac{1}{3}$ になったときの角速度を求める。

$$\text{角運動量保存則} \quad \mathbf{L} = m\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega} = \text{一定} \quad \text{より}$$

$$mr^2\omega_0 = m\left(\frac{r}{3}\right)^2\omega \quad (\text{ただし } m \text{ は粒子の質量})$$

$$\text{よって} \quad \omega = 9\omega_0$$

すなわち 粒子の円軌道の半径が $\frac{1}{3}$ に減少すると、粒子の角速度は 9 倍に増加する。