角運動量と力のモーメントの関係 $\longrightarrow$ 角運動量保存則

角運動量と力のモーメントの関係 ：「粒子の角運動量の時間的変化率は、粒子が受けた力のモーメントに等しい。」
より
角運動量保存則 ：「外系より力のモーメントが作用しない限り、粒子のもつ角運動量は保存される。」
を導出する。

［注］ 太文字の記号はベクトルを表示する。

$$\boldsymbol{N} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{\omega} - m(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}\right] \quad : \quad \text{角運動量と力のモーメントの関係}$$

ただし $\boldsymbol{N}$ は力のモーメント、$\boldsymbol{L}$ は角運動量、t は時間、m は粒子の質量、$\boldsymbol{r}$ は位置、$\boldsymbol{\omega}$ は角速度である。ここで 位置を表すベクトル $\boldsymbol{r}$ は動径ベクトルとも呼ばれる。

$$\boldsymbol{N} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{\omega} - m(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}\right] \quad \text{において}$$

力のモーメント $\boldsymbol{N} = 0$ のとき、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{\omega} - m(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}\right] = 0$$

よって $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{\omega} - m(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r} = \text{一定}$ ： 角運動量保存則

粒子が半径 $r = |\boldsymbol{r}|$ の円軌道上を運動する場合には、動径 $\boldsymbol{r}$ と角速度 $\boldsymbol{\omega}$ は常に直交するので、 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega} = 0$ となり、前述の角運動量保存則は次式のように記せる。

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{\omega} = \text{一定}$$

ここで 慣性モーメントと呼ばれる量 $I = m\boldsymbol{r}^2$ を定義すると上式は次のように簡潔に表せる。

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} = \text{一定}$$