

角運動量

角運動量と力のモーメントの関係：「粒子の角運動量の時間的変化率は、粒子が受けた力のモーメントに等しい。」

[注] 太文字の記号はベクトルを表示する。

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} : \text{角運動量と力のモーメントの関係}$$

ただし $\mathbf{N}$ は力のモーメント、 $\mathbf{L}$ は角運動量であって、それぞれ次式のように定義される。なお t は時間である。

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

ただし $\mathbf{r}$ は粒子の位置、 $\mathbf{F}$ は作用している力、 $\mathbf{p}$ は粒子のもつ運動量である。

粒子の運動量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ を用いると、角運動量は次式のように記せる。

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

ただし m は粒子の質量、 $\mathbf{v}$ は速度である。

角運動量と力のモーメントの関係は、主に回転する系に対して有用である。

粒子が一つの点のまわりで回転運動するとき、次式で定義される角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を用いると便利である。

$$\text{角速度 } \boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$$

ただし $\boldsymbol{\theta}$ は一点のまわりの粒子の回転角 (一般角) であって、ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ の方向は回転軸と同一かつ向きは回転に対して右ねじの進む向きと定める。このとき 速度 $\mathbf{v}$ と角速度 $\boldsymbol{\omega}$ の関係は次式のように表せる。

$$\text{速度 } \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

ここで 位置を表すベクトル $\mathbf{r}$ は動径ベクトルとも呼ばれる。

前述した角運動量と力のモーメントの関係について、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を用いると次式のように記せる。

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = m \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = m \frac{d}{dt}[\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] = m \frac{d}{dt}[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}] \\ &= \frac{d}{dt}[m\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega} - m(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}]\end{aligned}$$

$$\text{すなわち } \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[m\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega} - m(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}]$$

粒子が半径 $r = |\mathbf{r}|$ の円軌道上を運動する場合には、動径ベクトル $\mathbf{r}$ と角速度 $\boldsymbol{\omega}$ は常に直交するので、

$$\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$$

となり、上記の角運動量と力のモーメントの関係は次のように記せる。

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega})$$

ここで 慣性モーメントと呼ばれる量 $I = m\mathbf{r}^2$ を定義すると上式は次のように簡潔に表せる。

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\boldsymbol{\omega})$$

慣性モーメント I は動径ベクトル $\mathbf{r}$ の二乗に比例するスカラー量である。なお 粒子が一定の半径 $r = |\mathbf{r}|$ の円軌道上を運動する場合には、慣性モーメント I は時間的に変化せず定数となるので、

$$\mathbf{N} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

のように記してよい。このとき 力のモーメント $\mathbf{N}$ が時間的に変わらず一定のときには、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ の時間依存性は直ちに求めることができる。すなわち

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\mathbf{N}}{I} \quad \text{より} \quad \boldsymbol{\omega} = \int \frac{\mathbf{N}}{I} dt + c = \frac{\mathbf{N}}{I} t + c \quad (\text{初期条件 } t=0 \text{ のとき 角速度 } \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 \text{ とすると } c = \boldsymbol{\omega}_0)$$

$$\text{よって } \boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{N}}{I} t + \boldsymbol{\omega}_0$$

[直交座標表示]

3次元ユークリッド空間内の直交座標 xyz 系の各成分によって表示すると、前述の各式は次のように記せる。

(次の各式において、添え字 x, y, z は対応する座標軸方向の成分を示す。)

なお 回転する系の場合において、この直交座標表示はあまり便利な方法とは言えないが、参考として記す。

$$N_x = \frac{dL_x}{dt}, \quad N_y = \frac{dL_y}{dt}, \quad N_z = \frac{dL_z}{dt}$$

$$\begin{aligned} N_x &= yF_z - zF_y, & N_y &= zF_x - xF_z, & N_z &= xF_y - yF_x \\ L_x &= yp_z - zp_y, & L_y &= zp_x - xp_z, & L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned}$$

粒子に作用する力と運動量の方向が常に xy 平面内にあって、固定された z 軸のまわりを粒子が回転運動する場合には、上式において

$$z = 0, \quad F_z = 0, \quad p_z = 0$$

となるので、次式についてのみ考えればよい。

$$N_z = \frac{dL_z}{dt}$$

$$\begin{aligned} N_z &= xF_y - yF_x \\ L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned}$$

すなわち この場合、力のモーメント $\mathbf{N}$ や角運動量 $\mathbf{L}$ のベクトルの方向は z 軸方向となり、常に xy 平面に垂直である。このとき 粒子は常に xy 平面内において運動する。

[極座標]

平面内の回転運動を扱う際には、動径 r と角度 θ を座標変数とする極座標表示が便利である。平面極座標と直交座標の関係は次式のように表せる。

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

ただし θ は動径 r が x 軸となす角である。

3次元ユークリッド空間内の極座標には、球面極座標系 (r, θ, ϕ) がある。球面極座標 (r, θ, ϕ) と直交座標の関係は次式のように表せる。

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

ただし θ は動径 r が z 軸となす角であり、 ϕ は動径 r の xy 面上への射影が x 軸となす角である。球面極座標は球対称な系を扱う際には有用である。

円筒状の対称性をもった系に対しては、円柱座標系 (r, θ, z) が便利である。円柱座標 (r, θ, z) と直交座標の関係は次式のように表せる。

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

ただし θ は動径 r が x 軸となす角である。すなわち 円柱座標では平面極座標 r, θ と直交座標の一つ z を併用している。