

第2法則（運動の法則） → 角運動量と力のモーメントの関係

第2法則（運動の法則）：「粒子の運動量の時間的変化率は、粒子が受けている力に等しい。」

より

角運動量と力のモーメントの関係：「粒子の角運動量の時間的変化率は、粒子が受けた力のモーメントに等しい。」を導出する。

[注] 太文字の記号はベクトルを表示する。

ニュートンの運動方程式 $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ より $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ を導く。

ただし $\mathbf{N}$ は粒子に作用する力のモーメント、 $\mathbf{L}$ は粒子の角運動量であり、 $\mathbf{F}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ はそれぞれ力、運動量、位置である。また t は時間である。

$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$: ニュートンの運動方程式

両辺に $\mathbf{r}$ を外積して

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

そこで $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ について考えると

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

すなわち $\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$ となるので

前述の外積した運動方程式 $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ については

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \quad \text{となる。}$$

ここで 力のモーメント $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ならびに 角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ を定義すると

よって $\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$: 角運動量と力のモーメントの関係