エネルギー保存則

運動エネルギー保存則 ： 「系外から力の作用を受けない限り、粒子の運動エネルギーは保存される。」

力学的エネルギー保存則 ： 「保存力の作用のもとでは、運動エネルギーとポテンシャル エネルギーの総和
すなわち力学的エネルギーは保存される。」

[注] 太文字の記号はベクトルを表示する。

力 $\boldsymbol{F} = 0$ のとき 運動エネルギー $K =$ 一定 ： 運動エネルギー保存則

[保存力]

力 $\boldsymbol{F}$ が次式のようにポテンシャル エネルギー U によって与えられるとき、このような力を保存力という。

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U$$

ここでポテンシャル エネルギー U は位置のみの関数

$$U = U(\boldsymbol{r}) = U(x, y, z)$$

である。運動エネルギー K とポテンシャル エネルギー U を総称して力学的エネルギーという。

力学的エネルギー $K + U =$ 一定 ： 力学的エネルギー保存則

すなわち 保存力の作用では、運動エネルギー K とポテンシャル エネルギー U の和が不変で一定に保たれている。

[直交座標表示]

3 次元ユークリッド空間内の直交座標 syz 系の各成分によって表示すると、保存力は次のように記せる。
（次の各式において、添え字 x, y, z は対応する座標軸方向の成分を示す。）

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

[力学的エネルギー保存則の応用例]

地面より高さ h の位置から粒子を自由落下 (初速が零) させたとき、地面に達するときの粒子の速度を求める。
ただし 重力加速度を g とする。

地面を原点として、鉛直上向きに z 軸を設定すると

$$F_z = -mg \qquad \text{(ただし } m \text{ は粒子の質量)}$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{より} \quad -mg = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$U = \int mg\,dz + c = mgz + c \qquad \text{(ただし } c \text{ は積分定数)}$$

ポテンシャル エネルギーの基準点を地面 $(z = 0)$ に設定し、$z = 0$ のとき $U = 0$ とすると $c = 0$ なので

$$U = mgz$$

したがって 力学的エネルギー保存則は $\frac{1}{2}mv^2 + mgz =$ 一定 となる。

ただし v は位置 z における粒子の速度である。
そこで $z = h$ のとき $v = 0$ かつ $z = 0$ のとき v として上式に適用すると

$$\frac{1}{2}m \times 0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg \times 0 \quad \text{より}$$

よって $v = \sqrt{2gh}$