運動エネルギーと仕事の関係 → エネルギー保存則

運動エネルギーと仕事の関係 : 「粒子のもつ運動エネルギーの変化は、粒子になされた仕事に等しい。」
より

運動エネルギー保存則 : 「系外から力の作用を受けない限り、粒子の運動エネルギーは保存される。」
ならびに

力学的エネルギー保存則 : 「保存力の作用のもとでは、運動エネルギーとポテンシャル エネルギーの総和
すなわち力学的エネルギーは保存される。」
を導出する。

[注] 太文字の記号はベクトルを表示する。

運動エネルギーと仕事の関係 $W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = K_2 - K_1$ より 運動エネルギー $K = \text{一定}$ を導く。

ただし K_1, K_2 はそれぞれ位置 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ のときの粒子の運動エネルギーであり、 W は粒子になされた仕事である。また $\mathbf{F}$ は粒子に作用している力である。

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = K_2 - K_1 \quad : \quad \text{運動エネルギーと仕事の関係}$$

$$\mathbf{F} = 0 \text{ のとき } 0 = K_2 - K_1$$

$$\text{すなわち } K_1 = K_2$$

$$\text{よって 力 } \mathbf{F} = 0 \text{ のとき 運動エネルギー } K = \text{一定} \quad : \quad \text{運動エネルギー保存則}$$

[保存力]

運動エネルギーと仕事の関係 $W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = K_2 - K_1$ より $K + U = \text{一定}$ を導く。

ただし K は運動エネルギー、 U はポテンシャル エネルギーである。

力 $\mathbf{F}$ が次式のようにポテンシャル エネルギー U によって与えられるとき、このような力を保存力という。

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

ここでポテンシャル エネルギー U は位置のみの関数

$$U = U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$$

である。この保存力によってなされる仕事は次式のように与えられる

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla U \cdot d\mathbf{r} = - \int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = - \int_{U_1}^{U_2} dU = U_1 - U_2$$

$$\text{すなわち } W = U_1 - U_2 \quad : \quad \text{保存力によってなされる仕事}$$

ただし U_1, U_2 はそれぞれ位置 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ のときのポテンシャル エネルギーである。

保存力によってなされる仕事 W は二点の位置のみによって決まり、途中の運動経路には依存しない。そこで 前述の運動エネルギーと仕事の関係 $W = K_2 - K_1$ を用いると

$$W = U_1 - U_2 = K_2 - K_1 \quad \text{となるので } K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

すなわち 保存力の作用では、運動エネルギーとポテンシャル エネルギーの和が不変で一定に保たれている。運動エネルギーとポテンシャル エネルギーを総称して力学的エネルギーという。

$$\text{よって 力学的エネルギー } K + U = \text{一定} \quad : \quad \text{力学的エネルギー保存則}$$