エネルギー

運動エネルギーと仕事の関係：「粒子のもつ運動エネルギーの変化は、粒子になされた仕事に等しい。」

[注] 太文字の記号はベクトルを表示する。

粒子が位置 $\mathbf{r}_1$ から $\mathbf{r}_2$ まで変化する間に力 $\mathbf{F}$ の作用を受けて、粒子のもつ運動エネルギーが K_1 から K_2 に変化したとき、次式が成り立つ。

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = K_2 - K_1 : \text{運動エネルギーと仕事の関係}$$

ここで K_1, K_2 は次式によって定義され、それぞれ位置 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ のときの運動エネルギーである。

$$K_1 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_1^2, \quad K_2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_2^2$$

ただし 粒子の質量を m とし、位置 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ のときの速度をそれぞれ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ とする。また 次式で定義される W は仕事と呼ばれる。

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

一般に力 $\mathbf{F}$ は位置 $\mathbf{r}$ の関数 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ になっている。位置 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ のときの粒子の運動量 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ はそれぞれ

$$\mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{p}_2 = m\mathbf{v}_2$$

となるので、運動エネルギーと仕事の関係は次式のようにも記せる。

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m}$$

粒子に作用する力 $\mathbf{F}$ が位置に依存せず一定であるとき、仕事は次式のように簡潔に記せる。

$$W = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

このとき 運動エネルギーと仕事の関係は

$$W = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_1^2 = \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m}$$

のように表せる。運動エネルギーと仕事の関係は、数学的にはニュートンの運動方程式の空間積分形である。粒子の位置や速度変化を求める際には、運動エネルギーと仕事の関係は有用である。

[直交座標表示]

3次元ユークリッド空間内の直交座標 xyz 系の各成分によって表示すると、前述の各式は次のように記せる。

(次の各式において、添え字 x, y, z は対応する座標軸方向の成分を示す。)

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = K_2 - K_1 \\ &= \frac{1}{2} m (v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2) - \frac{1}{2} m (v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2) = \frac{1}{2m} m (p_{2x}^2 + p_{2y}^2 + p_{2z}^2) - \frac{1}{2m} m (p_{1x}^2 + p_{1y}^2 + p_{1z}^2) \end{aligned}$$

一般に力 F_x, F_y, F_z はそれぞれ位置 x, y, z の関数 $F_x = F_x(x, y, z)$, $F_y = F_y(x, y, z)$, $F_z = F_z(x, y, z)$ になっている。粒子に作用する力 F_x, F_y, F_z が位置に依存せず一定であるとき、運動エネルギーと仕事の関係は次式のように表せる。

$$\begin{aligned} W &= F_x(x_2 - x_1) + F_y(y_2 - y_1) + F_z(z_2 - z_1) = K_2 - K_1 \\ &= \frac{1}{2} m (v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2) - \frac{1}{2} m (v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2) = \frac{1}{2m} (p_{2x}^2 + p_{2y}^2 + p_{2z}^2) - \frac{1}{2m} (p_{1x}^2 + p_{1y}^2 + p_{1z}^2) \end{aligned}$$

[運動エネルギーと仕事の関係の応用例]

- (1) 質量 m の粒子が、座標の原点で x 軸方向に初速度 v_0 であるとき、この粒子が x 軸方向に一定の力 F_x を受けて運動する場合に x 軸における位置 X のときの速度 v_x を求める。(ただし v_0, F_x, X は正とする。)

$$F_x(x_2 - x_1) + F_y(y_2 - y_1) + F_z(z_2 - z_1) = \frac{1}{2}m(v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2) - \frac{1}{2}m(v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2) \quad \text{において}$$

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0 \quad \text{のとき} \quad v_{1x} = v_0, \quad v_{1y} = 0, \quad v_{1z} = 0$$

$$x_2 = X, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0 \quad \text{のとき} \quad v_{2x} = v_x, \quad v_{2y} = 0, \quad v_{2z} = 0 \quad \text{より}$$

$$F_x(X - 0) + 0 + 0 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + 0 + 0) - \frac{1}{2}m(v_0^2 + 0 + 0)$$

$$v_x^2 = v_0^2 + \frac{2F_x}{m}X$$

$$\text{よって} \quad v_x = \sqrt{v_0^2 + \frac{2F_x}{m}X}$$

- (2) 粒子を地面から鉛直上方に初速 v_0 で投射するとき、位置（高さ） z における粒子の速度 v_z を求める。ただし重力加速度を g とする。

鉛直上向きに z 軸を設定するとき

$$F_x(x_2 - x_1) + F_y(y_2 - y_1) + F_z(z_2 - z_1) = \frac{1}{2}m(v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2) - \frac{1}{2}m(v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2) \quad \text{において}$$

$$\text{重力} \quad F_z = -mg \quad (\text{ただし } m \text{ は粒子の質量})$$

$$\text{位置 } z_1 = 0 \text{ のとき} \quad \text{初速 } v_{1z} = v_0, \quad \text{位置 } z \text{ のときの速度 } v_{2z} = v_z \quad \text{より}$$

$$0 + 0 - mg(z - 0) = \frac{1}{2}m(0 + 0 + v_z^2) - \frac{1}{2}m(0 + 0 + v_0^2)$$

$$v_z^2 = v_0^2 - 2gz$$

$$\text{よって} \quad \text{速度 } v_z = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gz}$$

[仕事率]

仕事 W を時間 t で微分した量は仕事率と呼ばれる。すなわち 仕事率 P は次式のように定義される。

$$P = \frac{dW}{dt}$$

仕事率は単位時間あたりになされる仕事に該当し、工学などの応用科学分野においては有用である。

[エネルギーならびに仕事の単位]

エネルギーならびに仕事の単位については、MKS 単位系においては J（ジュール）または Nm（ニュートンメートル）である。なお 仕事率の単位は、 J s^{-1} または W（ワット）である。