

第2法則（運動の法則） → 運動エネルギーと仕事の関係

第2法則（運動の法則）：「系外から力の作用を受けている粒子は、その力に比例した加速度をもつ。
この加速度は粒子のもつ質量には反比例する。」

より

運動エネルギーと仕事の関係：「粒子のもつ運動エネルギーの変化は、粒子になされた仕事に等しい。」
を導出する。

[注] 太文字の記号はベクトルを表示する。

ニュートンの運動方程式 $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ より $W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1$ を導く。

ただし v_1, v_2 はそれぞれ位置 r_1, r_2 のときの粒子の速度であり、 K_1, K_2 はそれぞれ運動エネルギー、 W は粒子になされた仕事である。また m は粒子の質量である。
ここでは一般に力 $\mathbf{F}$ は粒子の位置 $\mathbf{r}$ の関数とする。

$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$: ニュートンの運動方程式

両辺に $d\mathbf{r}$ を内積して

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$$

左辺を位置 $\mathbf{r}$ について、右辺を速度 $\mathbf{v}$ について、それぞれ定積分すると

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \int_{v_1}^{v_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\text{すなわち } \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

ここで 仕事 $W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ならびに 運動エネルギー $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ かつ $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$ を定義すると

よって $W = K_2 - K_1$: 運動エネルギーと仕事の関係

一般に質量 m の粒子が速度 $\mathbf{v}$ で運動しているとき、粒子のもつ運動エネルギー K は次式で定義される。

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

ただし $\mathbf{p}$ は粒子の運動量 ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$) である。