

運動量保存則

運動量保存則：「系外から力の作用を受けない限り、粒子のもつ運動量は保存される。」

[注] 太文字の記号はベクトルを表示する。

力 $\mathbf{F} = 0$ のとき 運動量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \text{一定}$ ：運動量保存則

ただし m は粒子の質量、 $\mathbf{v}$ は速度である。

複数個の粒子からなる系の場合であっても、系外から力の作用を受けない限り、その粒子系の運動量の総和は常に一定であり、粒子系の全体の運動量は保存される。質量がそれぞれ m_1, m_2 で速度がそれぞれ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ の二つの粒子が、時刻 t_a から t_b までの間に互いに力 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ を及ぼし合い、速度がそれぞれ $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ になったとすると、各粒子に対して運動量と力積の関係を適用すると

$$\int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_1 dt = m_1 \mathbf{v}'_1 - m_1 \mathbf{v}_1$$
$$\int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}_2 dt = m_2 \mathbf{v}'_2 - m_2 \mathbf{v}_2$$

となる。ただし t は時間であり、左辺が力積を与える。質量 m_1 の粒子が受ける力 $\mathbf{F}_1$ と質量 m_2 の粒子が受ける力 $\mathbf{F}_2$ との間には、作用反作用の法則より

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$$

の関係が成り立つので、力積は消去できて

$$m_1 \mathbf{v}'_1 - m_1 \mathbf{v}_1 = -(m_2 \mathbf{v}'_2 - m_2 \mathbf{v}_2)$$

よって $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2$

が得られる。すなわち 系内にある各粒子が互いに力を及ぼし合っている、作用反作用の法則が成立する限り、系の粒子系の全体の運動量は保存されている。

[二粒子の衝突]

質量がそれぞれ m_1, m_2 で速度がそれぞれ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ の二つの粒子が衝突し、衝突後は二粒子の速度がそれぞれ $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ になったとすると、運動量保存則より次式が成り立つ。

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2$$

衝突時の二粒子間の反発係数を e とするとき、次式が成り立つ。

$$\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1 = -e(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

ここで 反発係数 e は $0 \leq e \leq 1$ の範囲の値をもつ。反発係数 $e = 1$ のとき完全弾性衝突と呼ばれ、衝突前後の二粒子の運動エネルギーの総和は保存される。

二粒子の質量 m_1, m_2 と衝突前の速度 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ならびに反発係数が既知であるとき、上式を $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ を未知数とする二元連立方程式とみなして解くことができるので、衝突後の二粒子の速度が求められる。

[直交座標表示]

3次元ユークリッド空間内の直交座標 xyz 系の各成分によって表示すると、前述の各式は次のように記せる。

(次の各式において、添え字 x, y, z は対応する座標軸方向の成分を示す。)

運動量保存則と反発係数

$$\begin{aligned} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} &= m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}, & v'_{2x} - v'_{1x} &= -e(v_{2x} - v_{1x}) \\ m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} &= m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y}, & v'_{2y} - v'_{1y} &= -e(v_{2y} - v_{1y}) \\ m_1 v_{1z} + m_2 v_{2z} &= m_1 v'_{1z} + m_2 v'_{2z}, & v'_{2z} - v'_{1z} &= -e(v_{2z} - v_{1z}) \end{aligned}$$

[運動量保存則の応用例]

- (1) x 軸方向に速度 v で運動していた質量 m の粒子が、静止していた質量 M の粒子に衝突したとき、衝突後の各粒子の速度を求める。ただし 反発係数 $e = 0$ とする。

$$\begin{aligned} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} &= m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \\ v'_{2x} - v'_{1x} &= -e(v_{2x} - v_{1x}) \end{aligned} \quad \text{において}$$

$$m_1 = m, \quad v_{1x} = v, \quad m_2 = M, \quad v_{2x} = 0, \quad e = 0 \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} mv + M \times 0 &= mv'_{1x} + Mv'_{2x} \\ v'_{2x} - v'_{1x} &= -0 \times (0 - v) \end{aligned} \quad \text{なので}$$

$$\begin{aligned} mv &= mv'_{1x} + Mv'_{2x} \\ v'_{2x} - v'_{1x} &= 0 \end{aligned} \quad \text{すなわち} \quad v'_{2x} = v'_{1x} \quad \text{であるから}$$

$$mv = mv'_{1x} + Mv'_{1x}$$

$$\text{よって} \quad v'_{1x} = v'_{2x} = \frac{mv}{m + M}$$

反発係数 $e = 0$ のときは、衝突後に二つの粒子は一体となって互いに等しい速度で運動する。

- (2) x 軸方向に速度 v で運動していた質量 m の粒子が、静止していた質量 M の粒子に衝突したとき、衝突後の各粒子の速度を求める。ただし 反発係数 $e = 1$ とする。

$$\begin{aligned} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} &= m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} \\ v'_{2x} - v'_{1x} &= -e(v_{2x} - v_{1x}) \end{aligned} \quad \text{において}$$

$$m_1 = m, \quad v_{1x} = v, \quad m_2 = M, \quad v_{2x} = 0, \quad e = 1 \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} mv + M \times 0 &= mv'_{1x} + Mv'_{2x} \\ v'_{2x} - v'_{1x} &= -(0 - v) \end{aligned} \quad \text{なので}$$

$$\begin{aligned} mv &= mv'_{1x} + Mv'_{2x} \\ v'_{2x} - v'_{1x} &= v \end{aligned} \quad \text{すなわち} \quad v'_{2x} = v + v'_{1x} \quad \text{であるから}$$

$$mv = mv'_{1x} + M(v + v'_{1x})$$

$$\text{よって} \quad v'_{1x} = \frac{m - M}{m + M}v$$

$$v'_{2x} = v + \frac{m - M}{m + M}v = \frac{2m}{m + M}v$$

反発係数 $e = 1$ (完全弾性衝突) のときは、衝突前後での運動エネルギーの和は保存される。

$$\text{衝突前の運動エネルギーの和} : \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M \times 0^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{衝突後の運動エネルギーの和} : \frac{1}{2}m \left(\frac{m - M}{m + M}v \right)^2 + \frac{1}{2}M \left(\frac{2m}{m + M}v \right)^2 = \frac{1}{2}mv^2$$