

運動量

運動量と力積の関係：「粒子のもつ運動量の変化は、粒子が受けた力積に等しい。」

[注] 太文字の記号はベクトルを表示する。

粒子が時刻 t_1 から t_2 までの間に力 $\mathbf{F}$ の作用を受けて、粒子のもつ運動量が $\mathbf{p}_1$ から $\mathbf{p}_2$ に変化したとき、次式が成り立つ。

$$\Phi = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 : \text{運動量と力積の関係}$$

ここで

$$\Phi = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$$

で定義される Φ は力積と呼ばれる。一般に力 $\mathbf{F}$ は時間 t の関数 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ になっている。粒子の質量 m とし、時刻 t_1, t_2 のときの速度を $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ とすると、運動量はそれぞれ

$$\mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{p}_2 = m\mathbf{v}_2$$

となるので、運動量と力積の関係は次式のようにも記せる。

$$\Phi = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

粒子に作用する力 $\mathbf{F}$ が時間的に一定であるとき、力積は次式のように簡潔に記せる。

$$\Phi = \mathbf{F}(t_2 - t_1)$$

このとき 運動量と力積の関係は

$$\Phi = \mathbf{F}(t_2 - t_1) = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

のように表せる。運動量と力積の関係は、数学的にはニュートンの運動方程式の時間積分形である。粒子の速度変化を求める際には、運動量と力積の関係は有用である。

[直交座標表示]

3次元ユークリッド空間内の直交座標 xyz 系の各成分によって表示すると、前述の各式は次のように記せる。

(次の各式において、添え字 x, y, z は対応する座標軸方向の成分を示す。)

$$\Phi_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = p_{2x} - p_{1x} = mv_{2x} - mv_{1x}$$

$$\Phi_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = p_{2y} - p_{1y} = mv_{2y} - mv_{1y}$$

$$\Phi_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = p_{2z} - p_{1z} = mv_{2z} - mv_{1z}$$

一般に力 F_x, F_y, F_z は時間 t の関数 $F_x = F_x(t), F_y = F_y(t), F_z = F_z(t)$ になっている。粒子に作用する力 F_x, F_y, F_z が時間的に一定であるとき、運動量と力積の関係は次式のように表せる。

$$\Phi_x = F_x(t_2 - t_1) = p_{2x} - p_{1x} = mv_{2x} - mv_{1x}$$

$$\Phi_y = F_y(t_2 - t_1) = p_{2y} - p_{1y} = mv_{2y} - mv_{1y}$$

$$\Phi_z = F_z(t_2 - t_1) = p_{2z} - p_{1z} = mv_{2z} - mv_{1z}$$

[運動量と力積の関係の応用例]

- (1) 質量 m の粒子が、時刻 0 で初速度 $\mathbf{v}_0$ であるとき、この粒子が一定の力 $\mathbf{F}$ を受けて運動する場合に時間 t の後の速度 $\mathbf{v}$ を求める。

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t_2 - t_1) &= m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \quad \text{において} \\ t_1 = 0 \text{ のとき } \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_0, \quad t_2 = t \text{ のとき } \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} \quad \text{より} \\ \mathbf{F}(t - 0) &= m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0\end{aligned}$$

$$\text{よって } \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{F}}{m}t$$

すなわち 粒子の速度 $\mathbf{v}$ は時間 t の一次関数となり、これは直線上の等加速度運動を示す。

- (2) 粒子を地面より鉛直上方に初速 v_0 で投射するとき、時間 t 後の粒子の速度 v_z と位置 z (高さ) を求める。
ただし重力加速度を g とする。

$$\begin{aligned}\text{鉛直上向きに } z \text{ 軸を設定するとき} \\ F_z(t_2 - t_1) &= mv_{2z} - mv_{1z} \quad \text{において} \\ \text{重力 } F_z &= -mg \quad (\text{ただし } m \text{ は粒子の質量}) \\ \text{時刻 } t_1 = 0 \text{ のとき 初速 } v_{1z} &= v_0, \quad \text{時間 } t \text{ 後の速度 } v_{2z} = v_z \quad \text{より} \\ -mg(t - 0) &= mv_z - mv_0 \\ \text{よって 速度 } v_z &= v_0 - gt\end{aligned}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} \quad \text{を用いると}$$

$$\frac{dz}{dt} = v_0 - gt$$

時間 t について積分すると

$$z = \int (v_0 - gt) dt = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + c \quad (\text{ただし } c \text{ は積分定数})$$

積分定数 c は初期条件である時刻 $t = 0$ のとき $z = 0$ (地面の高さは零) より $c = 0$ に決まる。

$$\text{よって 位置 } z = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

[力積の単位]

力積の単位については、MKS 単位系では N m (ニュートン メートル) である。