

第2法則（運動の法則） → 運動量と力積の関係

第2法則（運動の法則）：「粒子のもつ運動量の時間的変化率は、粒子が受けている力に等しい。」
より

運動量と力積の関係：「粒子のもつ運動量の変化は、粒子が受けた力積に等しい。」
を導出する。

[注] 太文字の記号はベクトルを表示する。

ニュートンの運動方程式 $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ より $\mathbf{\Phi} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ を導く。

ただし $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ はそれぞれ時刻 t_1, t_2 のときの粒子の運動量であり、 $\mathbf{\Phi}$ は粒子が受けた力積である。
ここでは一般に力 \mathbf{F} は時間 t の関数とする。

$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$: ニュートンの運動方程式

$$\mathbf{F} dt = d\mathbf{p}$$

左辺を時間 t について、右辺を運動量 \mathbf{p} について、それぞれ定積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$$

すなわち
$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$$

ここで 力積 $\mathbf{\Phi} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$ を定義すると

よって $\mathbf{\Phi} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$: 運動量と力積の関係