

第2法則（運動の法則）

「粒子のもつ運動量の時間的変化率は、系外から粒子が受けている力に等しい。」

または

「系外から力の作用を受けている粒子は、その力に比例した加速度をもつ。

この加速度は粒子のもつ質量には反比例する。」

[注] 太文字の記号はベクトルを表示する。

質量 m の粒子が系外からの力 $\mathbf{F}$ の作用により運動するとき、ニュートンの運動方程式

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{a}$$

に従う。ニュートンの運動方程式は古典力学における基本方程式である。ただし t は時間であり、 $\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{p}$ はそれぞれ次式によって定義される量である。

粒子の位置 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ すなわち 位置 $\mathbf{r}$ は時間 t の関数

$$\text{速度 } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\text{加速度 } \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

$$\text{運動量 } \mathbf{p} = m\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

[直交座標表示]

3次元ユークリッド空間内の直交座標 xyz 系の各成分によって表示すると、前述の各式は次のように記せる。

(次の各式において、添え字 x, y, z は対応する座標軸方向の成分を示す。)

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = ma_x$$

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} = ma_y$$

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} = ma_z$$

位置 $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$ ただし x, y, z は粒子の直交座標であり、それぞれ時間 t の関数

$$\text{速度 } v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\text{加速度 } a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\text{運動量 } p_x = mv_x = m \frac{dx}{dt}, \quad p_y = mv_y = m \frac{dy}{dt}, \quad p_z = mv_z = m \frac{dz}{dt}$$

ニュートンの運動方程式は、位置座標 x, y, z に関しては時間 t を独立変数とする二階の常微分方程式である。粒子の位置座標や速度は、予め定められた初期条件のもとでニュートンの運動方程式を解くことによって得られる。ここで初期条件とは既定の時刻における粒子の速度と位置の値である。すなわち 数学的には二階常微分方程式を満足するような時間 t の関数 $x(t), y(t), z(t)$ をそれぞれ求めることに帰着する。このとき 積分定数は初期条件によって決まる。

[力 F の例]

ただし F は力の大きさ、すなわち $F = |\mathbf{F}|$ を示す。

重力 $F = mg$ ただし m は質量、 g は重力加速度

二粒子間の万有引力 $F = G \frac{mm'}{r^2}$ ただし G は万有引力定数、 m, m' は粒子の質量、 r は二粒子間の距離

粒子が円運動するときの向心力 $F = \frac{mv^2}{r}$ ただし m は粒子の質量、 v は速度、 r は円軌道の半径

バネによる復元力 $F = -kx$ ただし k はバネ定数 ($k > 0$)、 x はバネの伸び

摩擦力 $F = \mu N$ ただし μ は摩擦係数、 N は抗力

流体による浮力 $F = \rho Vg$ ただし ρ は流体の密度、 V は流体中の物体の体積、 g は重力加速度

荷電粒子間の静電気力 $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$ ただし ϵ_0 は真空誘電率、 q, q' は電荷、 r は荷電粒子間の距離

荷電粒子が電場から受ける力 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ ただし q は電荷、 $\mathbf{E}$ は電場

運動する荷電粒子が磁束密度から受ける力 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ただし q は電荷、 $\mathbf{v}$ は粒子の速度、 $\mathbf{B}$ は磁束密度

[運動方程式の応用例]

(1) 質量 m の粒子が x 軸方向に一定の力 F_x を受けて運動するとき、

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_x}{m}$$

(2) 一定の重力 $F_z = -mg$ を受けて粒子が運動するとき、(ただし座標軸は鉛直上向きに z 軸を設定)

$$-mg = m \frac{d^2z}{dt^2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

(3) 質量 m の粒子が x 軸方向に復元力 $F_x = -kx$ を受けて運動するとき、

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

(4) 電荷 q の荷電粒子が x 軸方向に一定の電場 E_x を受けて運動するとき、

$$qE_x = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{qE_x}{m}$$

[ガリレイ変換]

ニュートンの運動方程式は、ガリレイ変換と呼ばれる慣性座標系の変換則に対して不変である。基準としての xyz 系に対して $x'y'z'$ 系が速度 v でもって x 軸の正の向きに等速度運動しているとき、ガリレイ変換は次式のように記せる。ここでは xyz 系と $x'y'z'$ 系の各座標軸はそれぞれ互いに平行となるように設定する。

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

ただし x', y', z' や t' は、 $x'y'z'$ 系から観測したときの粒子の位置座標や時間を示す。この式をニュートンの運動方程式に代入すると

$$ma'_x = m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = F_x, \quad ma'_y = m \frac{d^2 y'}{dt'^2} = F_y, \quad ma'_z = m \frac{d^2 z'}{dt'^2} = F_z$$

となる。この式はニュートンの運動方程式と同じ形を保っているので、確かにガリレイ変換に対して不変となっている。ただし a'_x, a'_y, a'_z は $x'y'z'$ 系から観測したときの粒子の加速度である。

ここで基準系とは、観測者が固定されている座標系である。観測者が xyz 系に固定されているとき、観測者は自身の座標系である xyz 系の速度を感知し得ないので、その系は相対的に静止系となる。

ガリレイ変換において、時間 t は独立のパラメーターであり、時刻の歩度が観測者の位置や速度に依存することはない。すなわち ガリレイ変換では、時間はどの座標系においても同一の歩度で一様に経過していく量であるとされ、座標系に依存することがない。

[角速度を用いた運動方程式]

粒子が一つの点のまわりで回転運動するとき、次式で定義される角速度 ω を用いて運動方程式を記すと便利である。

$$\text{角速度 } \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

ただし θ は一点のまわりの粒子の回転角 (一般角) であって、ベクトル θ の方向は回転軸と同一かつ向きは回転に対して右ねじの進む向きと定める。このとき 速度 v と角速度 ω との関係は次式のように表せる。

$$\text{速度 } v = \omega \times r$$

ただし r は粒子の位置である。(この場合に位置を表すベクトル r は動径ベクトルとも呼ばれる。)

前述した運動方程式について、角速度 ω を用いて記すと次式のように表せる。

$$\begin{aligned} F &= m \frac{dv}{dt} = m \frac{d}{dt}(\omega \times r) = m \left(\frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times \frac{dr}{dt} \right) = m \left(\frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times v \right) = m \left[\frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times (\omega \times r) \right] \\ &= m \left[\frac{d\omega}{dt} \times r + (\omega \cdot r)\omega - (\omega \cdot \omega)r \right] = m \left[\frac{d\omega}{dt} \times r + (\omega \cdot r)\omega - \omega^2 r \right] \end{aligned}$$

$$\text{すなわち } F = m \frac{d\omega}{dt} \times r + m(\omega \cdot r)\omega - m\omega^2 r$$

粒子が一定の半径 $r = |r|$ の円軌道上を運動する場合には、角速度 ω と動径 r は常に直交するので、

$$\omega \cdot r = 0$$

となり、上記の運動方程式は次のように簡略に記せる。

$$F = m \frac{d\omega}{dt} \times r - m\omega^2 r$$

また 等速円運動の場合には、角速度 ω が時間的に変化せず一定なので、

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

となり、運動方程式は更に簡単化され次式のように記せる。

$$F = -m\omega^2 r$$

この力は粒子を円運動させるために必要な力であって向心力と呼ばれ、常に円の中心方向を向いている。すなわち 動径ベクトル r とは逆向きの方向となる。

角速度 $\boldsymbol{\omega}$ と動径ベクトル $\boldsymbol{r}$ が常に直交するとき、速度の大きさ v は

$$v = |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}| = \omega r$$

となる。ただし ω ならびに r はそれぞれ角速度の大きさ $|\boldsymbol{\omega}|$ ならびに動径ベクトルの大きさ $|\boldsymbol{r}|$ である。このとき前述の向心力の大きさ $F = |\boldsymbol{F}|$ は次式のように速度の大きさ v を用いて記せる。

$$F = |-m\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{r}| = m\omega^2 r = m\left(\frac{v}{r}\right)^2 r = \frac{mv^2}{r}$$

すなわち 粒子に作用する向心力は、速度の大きさの二乗に比例し円軌道の半径に反比例する。

[MKS 単位系]

MKS 系は m, kg, s(秒) を基本単位とする単位系であり、現在では国際単位系 (SI) に含まれる。

力学量	単位記号	呼称
位置	m	メートル
質量	kg	キログラム
速度	m s^{-1}	メートル 秒 ⁻¹
加速度	m s^{-2}	メートル 秒 ⁻²
運動量	kg m s^{-1}	キログラム メートル 秒 ⁻¹
力	N または kg m s^{-2}	ニュートン または キログラム メートル 秒 ⁻²
角度		ラジアン [注] 円周と半径の比であって無次元量
角速度	s^{-1}	ラジアン 秒 ⁻¹